Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.7

14.11.2019

Esercizio 1. Sia L semisemplice di dimensione 3. Si dimostri che L è isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.

Esercizio 2. Si dimostri che non esistono algebre di Lie semisemplici di dimensioni 1, 2, 4, 5, 7.

Esercizio 3. Sia L algebra di Lie semisemplice, e H una sottoalgebra torale massimale. Si dimostri che

$$\dim(L) \geq 3\dim(H)$$

Per ogni intero positivo n, si trovino L e H tali che $\dim(H) = n$ e $\dim(L) = 3n$.

Per tutti i prossimi esercizi, siano E uno spazio euclideo con prodotto scalare $(-,-)$, e sia $\Phi \subset E$ un sistema di radici.

Ricordiamo: dato un vettore non nullo $\alpha \in E$, si definisce *riflessione associata ad* α l'applicazione lineare $s_\alpha \colon E \to E$ data da $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha^\vee \rangle \alpha$, dove $\langle x, \alpha^\vee \rangle = \frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. Geometricamente, l'applicazione s_α è la riflessione rispetto all'iperpiano dei vettori ortogonali ad α.

Esercizio 4. Sia α un elemento non nullo di E, e sia $E' \subseteq E$ un sottospazio vettoriale. Si supponga $s_\alpha(E') = E'$, e si dimostri che allora $\alpha \in E'$, oppure tutti i vettori di E' sono ortogonali ad α.

Esercizio 5. Sia E di dimensione 2. Si calcoli l'ordine dell'elemento $s_\alpha s_\beta$ del gruppo di Weyl W di Φ, dove α e β sono due radici che formano un angolo non nullo il più piccolo possibile (fra gli elementi di Φ).

Esercizio 6. Sia $E' \subset E$ un sottospazio vettoriale, e sia $\Phi' = E' \cap \Phi$. Supponiamo che Φ' generi E' come spazio vettoriale. Si dimostri che allora Φ' è un sistema di radici in E'.

Esercizio 7. Fissata $\alpha \in \Phi$, consideriamo

$$\Phi' = \{\beta \in \Phi \mid (\beta, \beta) = (\alpha, \alpha)\}$$

Sia $E' \subseteq E$ il sottospazio vettoriale generato da Φ'. Si dimostri che Φ' è un sistema di radici in E'.