Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.6

7.11.2019

Esercizio 1. Sia L una delle seguenti algebre di Lie: $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, oppure $\mathfrak{sp}(2n)$. Sia $H = L \cap \mathfrak{h}(n)$ la sottoalgebra delle matrici diagonali di L. Dimostrare che H è una sottoalgebra torale massimale.

Esercizio 2. Scrivere le radici delle algebre L dell'esercizio precedente, rispetto alla sottoalgebra torale massimale H indicata, in termini delle applicazioni

$$\varepsilon_i \colon \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \mapsto a_i$$

(Suggerimento: per $L = \mathfrak{so}(n)$, conviene distinguere i due casi n dispari ed n pari. Per $L = \mathfrak{so}(n)$ ed $L = \mathfrak{sp}(2n)$, gli H-autospazi di L sono generati da matrici non sempre elementari, ma molto semplici: hanno zeri dappertutto, tranne che in *una o due* entrate.)

Esercizio 3. Sia $H = \mathfrak{h}(2) \cap \mathfrak{sl}(2)$, e sia H' una qualsiasi sottoalgebra torale massimale di $\mathfrak{sl}(2)$.

(1) Si dimostri che H' ha dimensione 1.
(2) Si dimostri che esiste $g \in \mathrm{GL}(2)$ tale che $gH'g^{-1} = H$.

Esercizio 4. Sia L semisemplice, e la si scriva come somma diretta di algebre semplici

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$$

Sia H sottoalgebra torale massimale di L. Si dimostri che $H_i = L_i \cap H$ è una sottoalgebra torale massimale di L_i, per ogni i. Se ne deduca che

$$\Phi = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_t$$

dove Φ è l'insieme delle radici di L, e Φ_i è l'insieme delle radici di L_i, per ogni i.

Esercizio 5. Sia L semisemplice e H una sottoalgebra torale massimale. Si dimostri che $H = N_L(H)$.