Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.5

31.10.2019

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie e V un L-modulo irriducibile. Si dimostri che ogni elemento di $\mathrm{Rad}(L)$ agisce su V come la moltiplicazione per uno scalare.

Esercizio 2. Sia $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ un'algebra di Lie tale che $\mathrm{Rad}(L)$ non è contenuto in $Z(L)$. Si usi l'esercizio precedente per dimostrare che esiste un L-modulo non completamente riducibile.

Esercizio 3. Sia $L = \mathfrak{sl}(2)$ e $V = k[X,Y]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in due variabili. Come visto a lezione, si consideri V come L-modulo nel modo seguente. Il sottospazio vettoriale V_1 dei polinomi omogenei di primo grado viene identificato con k^2 tramite l'applicazione lineare che soddisfa

$$X \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Y \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si considera dunque V_1 come L-modulo, identificandolo con la rappresentazione standard di $\mathfrak{sl}(2)$ su k^2. Poi si estende l'operazione di L a tutto V, definendo l'operazione di un qualsiasi elemento $x \in L$ su un prodotto $f(X,Y) \cdot g(X,Y)$ come

$$x.(f \cdot g) = f \cdot (x.g) + (x.f) \cdot g$$

(Attenzione: denotiamo con $x.f$ l'operazione di $x \in L$ su $f \in V$, e con $f \cdot g$ l'usuale moltiplicazione di polinomi in V.)

(1) Si dimostri che questo definisce una struttura di L-modulo su V.
(2) Si dimostri che, per ogni $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, il sottospazio vettoriale V_d dei polinomi omogenei di grado d è un sottomodulo[1].
(3) Si dimostri che V_d è irriducibile per ogni d.
(4) Supponiamo[2] che il campo k abbia caratteristica 2. Si trovi un sottomodulo W di dimensione 2 in V_2. Esiste un altro sottomodulo U in V_2 tale che $V_2 = W \oplus U$?

Esercizio 4. Sia L un'algebra di Lie, e $b\colon L \times L \to k$ una forma bilineare. Sia $f\colon L \otimes L \to k$ la corrispondente applicazione lineare, cioè tale che $f(v \otimes w) = b(v,w)$. Dunque f è un elemento del duale $(L \otimes L)^*$ di $L \otimes L$. Si consideri L come un L-modulo tramite la rappresentazione aggiunta, il che induce una struttura naturale di L-modulo sul duale $(L \otimes L)^*$. Dimostrare che, considerando questa struttura di L-modulo, la forma bilineare b è associativa se e solo se $x.f = 0$ per ogni $x \in L$.

[1] Quindi V sarebbe *completamente riducibile*, se ammettessimo nella definizione somme dirette di infiniti addendi. Infatti $V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} V_d$.

[2] Questa domanda quindi è al di fuori del contesto in cui stiamo svolgendo il corso. Consiglio di tentare di rispondere, se si vuole avere una prima idea di fenomeni tipici delle algebre di Lie in caratteristica positiva.