Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.4

17.10.2019

Esercizio 1. Si consideri la base usuale (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$, e si calcoli la base duale rispetto alla forma di Killing.

Esercizio 2. Si calcoli il determinante della forma di Killing di $\mathfrak{sl}(3)$.

Esercizio 3. Sia $J \in \mathfrak{gl}(2n)$ la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

cioè J ha tutti zeri tranne che sulla diagonale secondaria, dove ha una sequenza di 1 (n volte) seguita da una sequenza di -1 (n volte).

Si denoti $\mathfrak{sp}(2n, J)$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{gl}(n)$ delle matrici A tali che $AJ + JA^t = 0$. Si dimostri che $\mathfrak{sp}(2n, J)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$, e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 4. Sia L un'algebra di Lie e V un L-modulo. Supponiamo che V sia somma (non necessariamente diretta) di sottomoduli irriducibili

$$V = V_1 + \ldots + V_t$$

Si dimostri che V è completamente riducibile.

Esercizio 5. Sia L un'algebra di Lie risolubile, e sia V un L-modulo irriducibile. Si dimostri che $\dim(V) = 1$.

Esercizio 6. Si scriva l'elemento di Casimir della rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{sl}(2)$.