Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.3

10.10.2019

Esercizio 1. Si verifichi la matrice della forma di Killing su $\mathfrak{sl}(2)$ data a lezione, nella base (e, h, f):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Si dimostri che, se L è nilpotente, la forma di Killing di L è identicamente nulla.

Esercizio 3. Questo è un esercizio assegnato a lezione. Sia I un ideale di un'algebra di Lie L. Si dimostri che $I^{(i)}$ è un ideale di L per ogni $i > 0$.

Esercizio 4. Anche questo esercizio è stato assegnato a lezione, durante la dimostrazione della decomposizione di Fitting. Per questo motivo, non si può usare detta decomposizione nello svolgimento. Sia T endomorfismo di uno spazio vettoriale V (di dimensione finita). Siano α e β autovalori distinti di T, e si consideri una decomposizione

$$V = V_\alpha \oplus W$$

dove W è stabile per T, cioè $T(W) \subseteq W$, e V_α è la solita notazione per l'autospazio generalizzato. Si dimostri che $W_\beta = V_\beta$, dove naturalmente

$$W_\beta = \{w \in W \mid \exists m \in \mathbb{Z}_{>0} \mid (T - \beta)^m w = 0\}$$

(*Suggerimento:* l'inclusione non facile è quella $V_\beta \subseteq W_\beta$. Il primo passaggio può essere dimostrare che questa inclusione vale, se dimostriamo che $V_\alpha \cap V_\beta = \{0\}$. Inoltre, per dimostrare quest'ultima formula, è utile, dato $v \in V_\alpha \cap V_\beta$, considerare lo spazio vettoriale U generato da v, Tv, T^2v, eccetera, proseguendo finché si ottengono vettori linearmente indipendenti, e calcolare la matrice di T rispetto a questa base di U.)

Esercizio 5. Si dimostri il "viceversa" del criterio di Cartan: se $L \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ è risolubile, allora $\mathrm{tr}(xy) = 0$ per ogni $x \in [L, L]$ e ogni $y \in L$.