Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.2

3.10.2019

Esercizio 1. Siano $L = \mathfrak{gl}(n)$. Si dimostri che entrambe le sottoalgebre $\mathfrak{b}(n)$ e $\mathfrak{h}(n)$ sono uguali ai loro normalizzatori in L, e che $N_L(\mathfrak{u}(n)) = \mathfrak{b}(n)$.

Esercizio 2. Sia $J \in \mathfrak{gl}(n)$ la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si denoti $\mathfrak{so}(n, J)$ il sottospazio vettoriale di $\mathfrak{gl}(n)$ delle matrici A tali che $AJ + JA^t = 0$. Si dimostri che $\mathfrak{so}(n, J)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$, e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 3. Sia L un'algebra di Lie di dimensione 3.

(1) Si dimostri che, se $L = [L, L]$, allora L è semplice.
(2) Si dimostri che, se $[L, L]$ ha dimensione 2, allora L è risolubile.
(3) Si trovi un esempio di L che soddisfa la condizione del punto 2. (*Suggerimento*: si può trovare L come sottoalgebra di $\mathfrak{sl}(2) \times \mathfrak{sl}(2)$, dove questo prodotto è dotato del bracket naturale $[(a, b), (c, d)] = ([a, c], [b, d])$.)

Esercizio 4. Sia L un'algebra di Lie nilpotente, e K una sottoalgebra propria. Si dimostri che $N_L(K)$ contiene K strettamente.

Esercizio 5. Siano $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$, dove V è uno spazio vettoriale (di dimensione finita), tali che $[x, y] = 0$. Si dimostri che $(x + y)_s = x_s + y_s$ e $(x + y)_n = x_n + y_n$. Si trovi un esempio in cui queste uguaglianze non sono vere, per due elementi x e y che non commutano.