Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.11

12.12.2019

Esercizio 1. Sia L algebra di Lie (di dimensione finita), e H sottoalgebra torale. Usando la definizione usuale di L_λ per $\lambda \in H^*$, si supponga che L sia somma diretta di sottospazi vettoriali

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$$

per un sottoinsieme $\Phi \subseteq H^*$. Inoltre si supponga che L_α abbia dimensione 1 per ogni $\alpha \in \Phi$, che ogni $\alpha \in \Phi$ prenda valori non nulli su $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$, che Φ generi un $\mathbb{Q}$-sottospazio $E_\mathbb{Q}$ di H^* di dimensione uguale a $\dim_k(H)$, e che esista un prodotto scalare su $E_\mathbb{Q}$ (a valori in $\mathbb{Q}$) tale che Φ è un sistema di radici[1] irriducibile.

Si dimostri che allora L è semplice, di sottoalgebra torale massimale H e corrispondente sistema di radici Φ.

Esercizio 2. Si dimostri che $\mathfrak{sl}(n)$ (per $n \geq 2$), $\mathfrak{sp}(2n)$ (per $n \geq 1$), $\mathfrak{so}(2n+1)$ (per $n \geq 1$) e $\mathfrak{so}(2n)$ (per $n \geq 3$) sono algebre di Lie semplici (*suggerimento: usare l'esercizio precedente*).

Esercizio 3. Si dimostri che ogni inclusione di diagrammi di Dynkin induce in modo naturale un'omomorfismo iniettivo delle corrispondenti algebre di Lie semisemplici, e ogni automorfismo del diagramma di Dynkin induce in modo naturale un automorfismo dell'algebra di Lie semisemplice corrispondente.

[1] Con questo intendiamo che valgano i soliti assiomi di sistema di radici, ma in uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$. Equivalentemente, si può richiedere che Φ sia un sistema di radici in $E = \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Q} E_\mathbb{Q}$