Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.10

5.12.2019

Esercizio 1. Si dimostri che esiste al più una radice nella camera fondamentale. (*Suggerimento: si usi l'esercizio 4 del foglio 8.*)

Esercizio 2. Si dimostri che $\iota = (-1) \cdot \mathrm{Id}_E$ induce un automorfismo di Φ (cioè un isomorfismo $\Phi \to \Phi$). Inoltre, supponiamo che E abbia dimensione almeno 2, e che esista una radice β nella camera fondamentale. Si dimostri che allora ι non appartiene al gruppo di Weyl.

Esercizio 3. Si dimostri che nei tipi cosiddetti *non simply laced*, cioè per i diagrammi di Dynkin connessi che contengono un lato multiplo, l'elemento ι dell'esercizio precedente appartiene al gruppo di Weyl.

Esercizio 4. (*difficile*) Sia Φ un sistema di radici irriducibile e Δ una base. Si definisca l'ordinamento parziale dato da $\alpha > \beta$ se $\alpha - \beta$ è combinazione lineare di radici positive a coefficienti in $\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Sia θ una qualsiasi radice massimale[1] e si osservi che θ è positiva.

(1) Si dimostri che $(\theta, \alpha) \geq 0$ per ogni $\alpha \in \Delta$, cioè θ è nella chiusura della camera fondamentale.
(2) Si dimostri che θ si scrive come combinazione lineare di elementi di Δ con tutti coefficienti strettamente positivi.
(3) Si dimostri che θ è unica, e se ne deduca che $\theta > \beta$ per ogni radice $\beta \neq \theta$.
(4) Supponiamo che Φ contenga radici di lunghezze diverse; allora, per il teorema visto a lezione, le lunghezze sono solo due, e le radici si distinguono in "lunghe" e "corte". Si dimostri che θ è lunga.
(5) Nelle ipotesi del punto precedente, dimostrare che esiste anche una *radice massimale corta*, cioè una radice corta che è massimale fra le radici corte, e si dimostri che anch'essa è nella chiusura della camera fondamentale.

[1] Cioè $\theta > \beta$ per ogni radice $\beta \neq \theta$ confrontabile con θ. Almeno una radice siffatta esiste sicuramente: perché?