Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

Docente: Guido Pezzini

a.a. 2019/2020

Foglio di esercizi n.1

26.9.2019

Esercizio 1. Siano n, m numeri interi con $1 \leq m < n$, e si consideri l'insieme $\mathfrak{p}$ delle matrici $n \times n$ "a blocchi" della forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

dove A è una matrice $m \times m$, la matrice B è $m \times (n-m)$, la matrice C è $(n-m) \times (n-m)$, e tutte sono ad entrate in un campo k fissato.

(1) Si dimostri che $\mathfrak{p}$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n)$.
(2) Si consideri il sottoinsieme di $\mathfrak{p}$ formato dalle matrici tali che A e C sono entrambe matrici nulle. Si dimostri che è un ideale di $\mathfrak{p}$.

Esercizio 2. Si consideri l'algebra di Lie $\mathfrak{u}(n)$ per un intero $n \geq 1$. Si calcoli l'algebra derivata $[\mathfrak{u}(n), \mathfrak{u}(n)]$.

Esercizio 3. Fissato il campo $k = \mathbb{C}$, si consideri $\mathfrak{gl}(n)$, che denotiamo anche con $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Data l'inclusione $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, consideriamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $2n^2$. Con il bracket usuale è ovviamente un'algebra di Lie su $\mathbb{R}$, oltre che su $\mathbb{C}$. Si consideri ora il sottoinsieme delle matrici $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ tali che

$$A + \overline{A}^t = 0$$

cioè l'insieme delle matrici *antihermitiane*. Si dimostri che si tratta di una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Perché non è una sottoalgebra di Lie se invece consideriamo $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ come algebra di Lie su $\mathbb{C}$?

Esercizio 4. Si consideri la base usuale[1] (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$ formata dalle matrici

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino le matrici di $\mathrm{ad}(e)$, $\mathrm{ad}(h)$, $\mathrm{ad}(f)$ rispetto a questa base.

Esercizio 5. Sia k un campo di caratteristica diversa da 2, e $L = \mathfrak{sl}(2)$. Dimostrare che in questo caso $\mathrm{ad}\colon L \to \mathrm{Der}(L)$ è un isomorfismo.

[1] Ricordiamo che è comune anche la notazione x, h, y per gli stessi elementi di $\mathfrak{sl}(2)$.