Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

a.a. 2019/2020

Esame scritto del 6.7.2020

Tutti gli spazi vettoriali considerati sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie, e sia $M \subseteq L$ una sottoalgebra di Lie semisemplice.

(1) Si dimostri che $M \cap \mathrm{Rad}(L) = \{0\}$.
(2) Si consideri $\mathrm{Rad}(L)$ come M-modulo, tramite la rappresentazione aggiunta ad. Si dimostri che, se $\mathrm{Rad}(L)$ è un M-modulo irriducibile, allora $\mathrm{Rad}(L)$ è abeliano.
(3) Supponiamo che $\mathrm{Rad}(L) \neq \{0\}$. Si dimostri che $\mathrm{Rad}(L)$ ha un M-sottomodulo non banale, che è anche un ideale abeliano di $\mathrm{Rad}(L)$.

Soluzione esercizio 1. (1) L'intersezione $M \cap \mathrm{Rad}(L)$ è un ideale di M ed è risolubile, per cui è nulla.
(2) Ricordiamo che $\mathrm{Rad}(L)$ è un ideale di L. Il suo commutatore $K = [\mathrm{Rad}(L), \mathrm{Rad}(L)]$ è anch'esso un ideale di L, come abbiamo visto a lezione. Per cui K è un sottomodulo per ad, anche se considerata solo su M. Se $\mathrm{Rad}(L)$ è un M-modulo irriducibile, allora $\mathrm{Rad}(L) \neq \{0\}$, e abbiamo le possibilità $K = \mathrm{Rad}(L)$ oppure $K = \{0\}$. La prima è impossibile, perché allora avremmo che la serie derivata di $\mathrm{Rad}(L)$ non termina con $\{0\}$. Quindi $K = \{0\}$, cioè $\mathrm{Rad}(L)$ è abeliano.
(3) Per lo stesso motivo di prima, l'ultimo termine non banale della serie derivata di $\mathrm{Rad}(L)$ è un ideale di L, quindi anche un M-sottomodulo, ed è abeliano.

Esercizio 2. Sia (e, h, f) la base usuale di $\mathfrak{sl}(2)$, e si consideri lo spazio vettoriale V dei polinomi in due variabili X, Y. Si definisca l'applicazione lineare

$$\varphi\colon \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(V)$$

data sugli elementi della base nel modo seguente:

$$\varphi(e) = X\frac{\partial}{\partial Y}, \quad \varphi(h) = X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}, \quad \varphi(f) = Y\frac{\partial}{\partial X}.$$

Quindi ad esempio se

$$p = p(X, Y) = XY^2$$

allora

$$\varphi(e)(p) = X \cdot \frac{\partial p}{\partial Y} = 2X^2Y.$$

(1) Si dimostri che φ è una rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2)$.
(2) Si dimostri che esistono, per ogni d intero non negativo, sottomoduli $V_d \subset V$ di dimensione finita, tali che

$$V = \bigcup_{d=0}^{\infty} V_d.$$

(3) Si dimostri che esistono, per ogni d intero non negativo, sottomoduli *irriducibili* $U_d \subset V$ di dimensione finita, tali che

$$V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} U_d.$$

Si trovino anche i pesi massimali degli U_d trovati.

Soluzione esercizio 2. (1) Le proprietà dei commutatori della base solita (e, h, f) di $\mathfrak{sl}(2)$ si verificano immediatamente. Ad esempio

$$\left[X\frac{\partial}{\partial Y}, Y\frac{\partial}{\partial X}\right] = \left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right)\left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right) - \left(Y\frac{\partial}{\partial X}\right)\left(X\frac{\partial}{\partial Y}\right) =$$

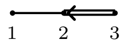
$$X\left(\frac{\partial}{\partial X}+Y\frac{\partial^2}{\partial Y\partial X}\right)-Y\left(\frac{\partial}{\partial Y}+X\frac{\partial^2}{\partial X\partial Y}\right)=X\frac{\partial}{\partial X}-Y\frac{\partial}{\partial Y}$$

che corrisponde a $[e,f]=h$.

(2) Osserviamo che tutti gli operatori $\varphi(e)$, $\varphi(h)$, $\varphi(f)$ conservano il grado totale dei polinomi. Quindi basta prendere per V_d il sottospazio dei polinomi di grado $\leq d$.

(3) Prendiamo per U_d il sottospazio dei polinomi *omogenei* di grado d. Si tratta effettivamente di un sottomodulo, di dimensione $d+1$, ed è somma diretta di sottomoduli irriducibili. È facile dimostrare direttamente che U_d stesso è irriducibile, possiamo però farlo in modo indiretto. Consideriamo $X^d \in U_d$: è un vettore massimale ed è un h-autovettore di autovalore d, quindi U_d contiene l'$\mathfrak{sl}(2)$-modulo semplice di peso più alto d. D'altronde questo sottomodulo ha proprio dimensione $d+1$, quindi coincide con U_d.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici di tipo C_3 in uno spazio euclideo E. Sia $\Delta=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ una base, numerata in modo che il diagramma di Dynkin sia



(1) Si trovino in Φ due radici ortogonali e di ugual lunghezza, tali che la somma è una radice.

(2) Si consideri la radice $\beta=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$. Si trovi un elemento del gruppo di Weyl, espresso come prodotto di riflessioni semplici, che manda β in una radice semplice.

Soluzione esercizio 3. (1) Il sistema di radici Φ contiene un sistema di radici di tipo B_2, contenente le radici α_2 ed α_3. Ricordando com'è fatto un sistema di radici di quel tipo, la somma $\alpha_2+\alpha_3$ è una radice corta, ortogonale ad α_2. Alternativamente, si può osservare che $\alpha_2+\alpha_3=s_{\alpha_3}(\alpha_2)$, e che $\langle\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2^\vee\rangle=2-2=0$

(2) Scrivendo $s_i=s_{\alpha_i}$, abbiamo

$$s_2(\beta)=\beta-\langle\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\alpha_2^\vee\rangle\alpha_2=\beta-(-1+4-2)\alpha_2=\beta-\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\gamma$$

(Osserviamo che β è ortogonale ad α_1 e ad α_3, per cui provare con le altre riflessioni non avrebbe spostato β.) Andiamo avanti:

$$s_3(\gamma)=\gamma-\langle\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3^\vee\rangle\alpha_3=\gamma-(0-1+2)\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2=\delta,$$

e allo stesso modo concludiamo $s_1(\delta)=\alpha_2$. Quindi un elemento come richiesto è $s_1s_3s_2$.

Esercizio 4. (1) Si dimostri che $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sp}(2)$ e $\mathfrak{so}(3)$ sono algebre di Lie fra loro isomorfe (suggerimento: in alcuni casi è utile scegliere in modo opportuno delle basi per le algebre di Lie considerate).

(2) Si dimostri che $\mathfrak{so}(6)$ e $\mathfrak{sl}(4)$ sono algebre di Lie fra loro isomorfe.

Soluzione esercizio 4. (1) Dalla definizione di $\mathfrak{sp}(2)$ vediamo subito che $\mathfrak{sp}(2)=\mathfrak{sl}(2)$. Troviamo ora una base di $\mathfrak{so}(3)$ che si comporta come la base (e,h,f) di $\mathfrak{sl}(2)$:

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix}$$

(2) Applichiamo l'esercizio 1 del foglio di esercizi n.11, con la sottoalgebra torale $\mathfrak{h}(6)\cap\mathfrak{so}(6)$. Intanto concludiamo che $\mathfrak{so}(6)$ è semplice, e troviamo, come nell'esercizio 1 del foglio n.8, una base di radici semplici che forniscono un diagramma di Dynkin di tipo A_3. Con lo stesso ragionamento applicato ad $\mathfrak{sl}(4)$, concludiamo che si tratta di algebre di Lie isomorfe grazie alla parte di "unicità" della classificazione delle algebre di Lie semisemplici tramite i loro diagrammi di Dynkin.