Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

a.a. 2019/2020

Esame scritto del 17.2.2020

Tutti gli spazi vettoriali considerati sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1. Si considerino le seguenti sottoalgebre di Lie di $\mathfrak{gl}(2)$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\},$$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in k \right\}.$$

(1) Si dimostri che L ed M non sono semplici.
(2) Si dimostri che L ed M non sono isomorfe.
(3) Sia N un'algebra di Lie di dimensione 2. Si dimostri che N è isomorfa a L oppure a M.

Soluzione esercizio 1. (1) L è abeliana, quindi non è semplice. M contiene $\mathfrak{u}(2)$ che si verifica facilmente essere un ideale di M, quindi M non è semplice.
(2) M non è abeliana, quindi non è isomorfa ad L.
(3) Se N è abeliana, si ottiene un isomorfismo con L mandando una base qualsiasi di N nelle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Altrimenti $[N, N]$ ha dimensione 1 (si fa vedere subito che ogni commutatore è un multiplo scalare del commutatore di due elementi della base). Sia u base di $[N, N]$, e completiamo u ad una base u, z di N, e abbiamo che $[z, u]$ è un multiplo scalare di u. Inoltre $[z, u] \neq 0$, altrimenti N sarebbe abeliana, quindi $[z, u] = cu$ con $c \neq 0$. Allora $[\frac{z}{c}, \frac{u}{c}] = \frac{1}{c^2}[z, u] = \frac{u}{c}$. Rimpiazziamo allora u con $\frac{u}{c}$ e z con $\frac{z}{c}$, e otteniamo $[z, u] = u$.

Otteniamo un isomorfismo con M mandando z in

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e u in

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Siano $L = \mathfrak{sl}(2)$ e $V = k^2$ con la struttura naturale di L-modulo. Si consideri il prodotto tensoriale $V^{\otimes 2} = V \otimes V$.

(1) Si calcolino gli autovalori dell'elemento $h \in L$ su $V^{\otimes 2}$, e le dimensioni dei relativi autospazi.
(2) Sia

$$V^{\otimes 2} = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

decomposizione in somma diretta di L-moduli irriducibili. Si trovi il numero n di addendi, e per ciascun addendo si calcoli il peso più alto.
(3) Sia V' un L-modulo irriducibile di dimensione 3. Si calcoli il numero di addendi di una decomposizione in somma diretta di irriducibili del modulo $V \otimes V'$.

Soluzione esercizio 2. (1) A meno di riscalaggio, gli autovettori di h su V sono i vettori e_1 ed e_2 della base canonica, di autovalori rispettivamente 1 e -1. Calcoliamo

$$h.(e_1 \otimes e_1) = (h.e_1) \otimes e_1 + e_1 \otimes (h.e_1) = 2 \cdot (e_1 \otimes e_1)$$

Con calcoli simili otteniamo gli autovettori $e_1 \otimes e_1$, $e_1 \otimes e_2$, $e_2 \otimes e_1$, $e_2 \otimes e_2$ di autovalori rispettivamente 2, 0, 0, -2. Visto che questi vettori sono anche una base di $V \otimes V$, abbiamo trovato gli autospazi: uno di autovalore 2 e dimensione 1, uno di autovalore 0 e dimensione 2, uno di autovalore -2 e dimensione 1.

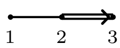
(2) Il numero di addendi è la dimensione dell'autospazio di autovalore 0 più la dimensione dell'autospazio di autovalore 1. In questo caso allora abbiamo 2 addendi. Calcoliamo i pesi massimali: il peso più alto che compare in $V \otimes V$ sarà sicuramente il peso più alto di un addendo irriducibile, per cui 2 è il peso massimale di un addendo, diciamo V_1. Troviamo V_2. Sappiamo che V_1 ha pesi 2, 0, -2 (tutti con dimensione dell'autospazio uguale ad 1), quindi V_1 contiene entrambi gli autospazi di $V \otimes V$ di dimensione 1, e contiene un sottospazio di dimensione 1 dell'autospazio di $V \otimes V$ di autovalore 0. Non rimangono altri autovettori di h fuori V_1, se non di peso 0. Quindi V_2 ha peso massimale 0.

(3) Sia f_1, f_2, f_3 una base di V' di h-autovettori, di pesi 2, 0, -2. Come prima, una base di autovettori di h è

$$\begin{aligned}
h.(e_1 \otimes f_1) &= 3e_1 \otimes f_1 \\
h.(e_1 \otimes f_2) &= e_1 \otimes f_2 \\
h.(e_1 \otimes f_3) &= -e_1 \otimes f_2 \\
h.(e_2 \otimes f_1) &= e_1 \otimes f_1 \\
h.(e_2 \otimes f_2) &= -e_1 \otimes f_2 \\
h.(e_2 \otimes f_3) &= -3e_1 \otimes f_2
\end{aligned}$$

quindi abbiamo due addendi.

Esercizio 3.
Sia Φ un sistema di radici di tipo B_3 in uno spazio euclideo E. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ una base, numerata in modo che il diagramma di Dynkin sia



(1) Si dimostri che $\beta = \alpha_2 + \alpha_3$ è una radice, e si determini se è lunga o corta (suggerimento: si usi l'azione del gruppo di Weyl).
(2) Si dimostri che β e α_1 formano una base di un sistema di radici Ψ (nel sottospazio di E generato da esse).
(3) Si calcoli $s_\beta(\alpha_1)$, e si determini se è nella chiusura della camera di Weyl fondamentale del sistema di radici Φ.

Soluzione esercizio 3. (1) Ricordiamo $\langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle = -1$ dal diagramma di Dynkin, quindi

$$s_{\alpha_2}(\alpha_3) = \alpha_3 - \langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_2 = \beta.$$

Inoltre β è una radice corta perché ha la stessa lunghezza di α_3.

(2) Il rapporto $\|\alpha_1\|^2/\|\beta\|^2$ è 2. Infatti α_1 è lunga e β è corta, ed è lo tesso rapporto che c'è fra α_2 ed α_3, che formano una base di un sistema di radici di tipo B_2. Il prodotto scalare fra α_1 e β inoltre è uguale a quello fra α_1 e α_2, visto che α_1 e α_3 sono ortogonali. Segue facilmente

$$\langle \alpha_1, \beta^\vee \rangle = 2\frac{(\alpha_1, \beta)}{(\beta, \beta)} = 2\frac{(\alpha_1, \alpha_2)}{(\beta, \beta)} = 4\frac{(\alpha_1, \alpha_2)(\beta, \beta)}{(\alpha_1, \alpha_1)(\beta, \beta)} = 2\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle = -2$$

e con un calcolo ancora più elementare risulta $\langle \beta, \alpha_1^\vee \rangle = -1$. Usando l'uguaglianza di Cauchy-Schwarz, l'angolo fra α_1 e β risulta essere $3\pi/4$, e dato il rapporto delle loro lunghezze concludiamo che sono una base di un sistema di radici di tipo B_2.

(3) Abbiamo

$$s_\beta(\alpha_1) = \alpha_1 - \langle \alpha_1, \beta^\vee \rangle \beta = \alpha_1 + 2\beta$$

che in effetti corrisponde al risultato che si vede facilmente in un sistema di radici di tipo B_2. Vediamo se i prodotti scalari con le radici semplici sono non negativi, o equivalentemente vediamo se le coradici semplici assumono valori non negativi:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha_1 + 2\beta, \alpha_1^\vee \rangle &= \langle \alpha_1, \alpha_1^\vee \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_1^\vee \rangle + 2\langle \alpha_3, \alpha_1^\vee \rangle = 2 - 2 + 0 = 0; \\
\langle \alpha_1 + 2\beta, \alpha_2^\vee \rangle &= \langle \alpha_1, \alpha_2^\vee \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_2^\vee \rangle + 2\langle \alpha_3, \alpha_2^\vee \rangle = -1 + 4 - 2 = 1; \\
\langle \alpha_1 + 2\beta, \alpha_3^\vee \rangle &= \langle \alpha_1, \alpha_3^\vee \rangle + 2\langle \alpha_2, \alpha_3^\vee \rangle + 2\langle \alpha_3, \alpha_3^\vee \rangle = 0 - 4 + 4 = 0;
\end{aligned}$$

quindi la risposta è “sì”.

Esercizio 4. (1) Si dimostri che $\mathfrak{so}(2n+1)$ ha una sottoalgebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{so}(2n)$, per ogni intero positivo n.
(2) Si dimostri che $\mathfrak{so}(2n)$ ha una sottoalgebra isomorfa a $\mathfrak{so}(2n-1)$, per ogni intero $n > 1$.

Soluzione esercizio 4. (1) Consideriamo il sottospazio di $\mathfrak{so}(2n+1)$ in cui imponiamo che siano zero la riga e la colonna centrale. Si vede facilmente che si tratta di una sottoalgebra di Lie isomorfa a $\mathfrak{so}(2n)$, tramite l'isomorfismo

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \\ C & 0 & D \end{pmatrix}$$

dove A, B, C, D sono blocchi $n \times n$, e gli zeri sono colonne $n \times 1$, righe $1 \times n$, oppure entrate a seconda della posizione. Osserviamo anche che l'immagine è costituita dalla sottoalgebra di $\mathfrak{so}(2n+1)$ delle matrici X tali che $Xe_{n+1} = 0$.
(2) È possibile costruire un isomorfismo esplicito in modo simile al precedente, ma un po' più complicato. Procediamo in modo diverso per una soluzione alternativa.

Sia J' una matrice simmetrica invertibile $(2n-1) \times (2n-1)$. Ricordiamo che le matrici J' e J sono congruenti[1], tramite una matrice invertibile M:

$$MJ'M^t = J.$$

Sia ora $\mathfrak{so}(2n-1, J')$ l'insieme delle matrici A tali che $AJ' + J'A^t = 0$. Abbiamo $A \in \mathfrak{so}(2n-1, J')$ se e solo se

$$MAJ'M^t + MJ'A^tM^t = 0$$

se e solo se

$$(MAM^{-1})MJ'M^t + MJ'M^t \underbrace{((M^t)^{-1}A^tM^t)}_{=(MAM^{-1})^t} = 0$$

se e solo se

$$(MAM^{-1})J + J(MAM^{-1})^t = 0$$

se e solo se $MAM^{-1} \in \mathfrak{so}(2n-1)$. Quindi il coniugio per M manda $\mathfrak{so}(2n-1, J')$ in $\mathfrak{so}(2n-1)$, ed è un isomorfismo di algebre di Lie.

Concludiamo che $\mathfrak{so}(2n-1)$ può venire definita tramite qualsiasi matrice simmetrica invertibile, a meno di isomorfismo. Inoltre, data b_J forma bilineare simmetrica associata alla matrice J, si può ridefinire immediatamente $\mathfrak{so}(2n-1)$ come il sottospazio di $\mathfrak{gl}(2n-1)$ delle matrici A tali che $b_J(Av, w) + b_J(v, Aw) = 0$ per ogni $v, w \in k^{2n-1}$.

Allo stesso modo, possiamo prendere un qualsiasi spazio vettoriale V di dimensione $2n-1$ e $b\colon V \times V \to k$ una forma bilineare simmetrica non degenere. Definiamo $\mathfrak{so}(V, b)$ come l'insieme degli endomorfismi φ di V tali che $b(\varphi(v), w) + b(v, \varphi(w)) = 0$, e otteniamo una sottoalgebra di Lie di $\mathrm{End}(V)$ isomorfa a $\mathfrak{so}(2n-1)$. L'isomorfismo si costruisce immediatamente grazie al ragionamento di prima, prendendo una base qualsiasi di V, e la matrice di b in quella base.

Consideriamo infine la forma bilineare non degenere B su k^{2n} che corrisponde alla definizione di $\mathfrak{so}(2n)$, e scegliamo un vettore v_0 non ortogonale a se stesso. Quindi il sottospazio U ortogonale a v_0 rispetto a B è un sottospazio di k^{2n} di dimensione $2n-1$, in somma diretta con kv_0, e $B|_{U\times U}$ è una forma bilineare simmetrica non degenere. Consideriamo $L \subseteq \mathfrak{gl}(2n)$ data dalle matrici A tali che $AU \subseteq U$, tali che $B(Av, w) + B(v, Aw) = 0$ per ogni $v, w \in U$, e tali che $\varphi(v_0) = 0$. Intanto osserviamo che allora ogni matrice di L è univocamente determinata dalla sua restrizione ad U, e grazie al ragionamento di prima otteniamo un isomorfismo di L con $\mathfrak{so}(2n-1)$.

[1] Sono entrambe congruenti all'identità. Dimostriamolo per es. per J: si può partire da una base qualsiasi $(v_1, \ldots, v_n)$ di vettori tali che $v_i^t \cdot J \cdot v_i \neq 0$, che esistono perché la forma quadratica $q\colon v \mapsto v^tJv$ è non degenere. Col procedimento di Gram-Schmidt si ortogonalizza la base rispetto alla forma bilineare simmetrica di q, poi si ortonormalizza grazie al fatto che k è algebricamente chiuso.

Rimane da dimostrare che $L \subseteq \mathfrak{so}(2n)$, verifichiamo la condizione data in termini di B. Presi $v, w \in k^{2n}$, li scriviamo come $v = v_1 + v_2$ e $w = w_1 + w_2$ dove $v_1, w_1 \in U$ e $v_2, w_2 \in kv_0$. Data $A \in L$ abbiamo

$$B(Av, w) + B(v, Aw) = B(Av_1 + Av_2, w_1 + w_2) + B(v_1 + v_2, Aw_1 + Aw_2) = B(Av_1, w_1) + B(v_1, Aw_1) = 0$$

(tutti gli altri addendi sono nulli!) per cui $L \subseteq \mathfrak{so}(2n)$.