Corso di Istituzioni di Algebra Superiore

a.a. 2019/2020

Esame scritto del 27.1.2019

SOLUZIONI

Tutti gli spazi vettoriali considerati sono definiti su un campo k algebricamente chiuso di caratteristica 0.

Esercizio 1.
(1) Sia L un'algebra di Lie, e sia I un ideale di L contenuto in $Z(L)$. Si dimostri che, se L/I ha dimensione 1, allora L è abeliana.
(2) Sia M un'algebra di Lie qualsiasi. Si deduca dall'enunciato precedente che[1] $M/Z(M)$ ha dimensione diversa da 1.
(3) Si esibisca un'algebra di Lie N tale che $N/[N,N]$ ha dimensione 1.

Soluzione esercizio 1. Parte (1). Sia $x \in L \setminus I$. Allora la classe laterale $x + I$ è una base dello spazio vettoriale L/I, cioè ogni elemento di L/I è del tipo $a \cdot x + I$ con $a \in k$. In altre parole, ogni elemento di L si può scrivere come somma di un multiplo di x e di un elemento di I.

Siano allora $y, z \in L$. Scriviamo

$$y = ax + i, \qquad z = bx + j$$

con $a, b \in k$ e $i, j \in I$. Abbiamo

$$[y, z] = [ax + i, bx + j] = ab[x, x] + [ax, j] + [i, bx] + [i, j] = \dots$$

Il primo addendo è ovviamente nullo, e gli altri tre sono nulli perché I è contenuto nel centro di L. Segue

$$\dots = 0$$

cioè L è abeliana.

Parte (2). Supponiamo per assurdo che $M/Z(M)$ abbia dimensione 1, in particolare $Z(M) \neq M$. Applicando all'ideale $Z(M)$ di M la parte (1), otteniamo che M è abeliana: assurdo.

Parte (3). Sia N di dimensione 1. Allora N è abeliana, la sua algebra derivata è $\{0\}$, e $N/[N,N]$ ha dimensione 1.

Esercizio 2. Sia $L = \mathfrak{sl}(3)$, e sia $M \subset L$ il sottospazio delle matrici della forma

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d \in k$.
(1) Si dimostri che M è una sottoalgebra di Lie, isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$.
(2) Si consideri L come M-modulo, restringendo a M la rappresentazione aggiunta $\mathrm{ad}\colon L \to \mathfrak{gl}(L)$ di L. Si decomponga L in somma diretta di M-moduli irriducibili.
(3) Si fissi un isomorfismo $M \cong \mathfrak{sl}(2)$, e tramite esso si consideri l'elemento $h \in \mathfrak{sl}(2)$ (con la solita notazione) come un elemento di M. Per ciascun addendo irriducibile del punto precedente, si trovi il peso massimale di h.
(4) Si trovi quali dei sottomoduli irriducibili dei punti precedenti sono M-moduli isomorfi fra loro.

Soluzione esercizio 2. Parte (1). Si verifica immediatamente che l'applicazione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Questo enunciato è l'analogo, per le algebre di Lie, del fatto che $G/Z(G)$ non è mai ciclico, se G è un gruppo.

(con $a, b, c \in k$) è un omomorfismo iniettivo $\mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{sl}(3)$ di algebre di Lie, e che la sua immagine è M.

Parte (2). Si può decomporre $\mathfrak{sl}(3)$ come M-modulo nel modo seguente:

$$\mathfrak{sl}(3) = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

dove

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2a \end{pmatrix} \middle| \; a \in k \right\}$$
$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in k \right\}$$
$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b \in k \right\}$$
$$V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \; a, b, c \in k \right\}$$

Il sottomodulo V_0 ha dimensione 1, quindi è irriducibile. Si verifica facilmente che i sottomoduli V_1 e V_2 sono irriducibili, con lo stesso argomento per cui il piano k^2 con la struttura naturale di $\mathfrak{sl}(2)$-modulo è irriducibile.

Il sottomodulo V_3 è isomorfo a $\mathfrak{sl}(2)$ stessa, considerata come $\mathfrak{sl}(2)$-modulo tramite la rappresentazione aggiunta. Essendo $\mathfrak{sl}(2)$ un'algebra di Lie semplice, non ha ideali propri non nulli, per cui è irriducibile come modulo su se stessa.

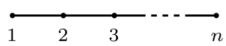
Parte (3). Si calcolano facilmente gli h-pesi, dove h è identificato con l'elemento

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In V_0 abbiamo solo il peso 0. In entrambi V_1 e V_2 abbiamo i pesi 1 e -1. In V_3 abbiamo i pesi 2, 0, -2. I pesi massimali sono dunque rispettivamente 0, 1, 1, 2.

Parte (4). Grazie alla classificazione dei moduli irriducibili per $\mathfrak{sl}(2)$ (o in generale per algebre di Lie semisemplici), gli unici moduli isomorfi fra loro sono V_1 e V_2, perché sono gli unici ad avere lo stesso peso massimale.

Esercizio 3.
Sia n un intero positivo e sia Φ un sistema di radici di tipo A_n. Sia $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ una base, numerata in modo che il diagramma di Dynkin sia



Sia $w = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_2$, dove s_i è la riflessione semplice rispetto alla radice semplice α_i per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

(1) Si dimostri che $\theta = w(\alpha_1)$ soddisfa $\theta \geq \alpha_i$ per ogni i.
(2) Si trovi per quali $i \in \{1, \dots, n\}$ si ha $\theta - \alpha_i \in \Phi$.
(3) Si dimostri che θ è nella chiusura della camera di Weyl fondamentale.

Soluzione esercizio 3. Parte (1). Il diagramma di Dynkin implica che tutte le radici semplici hanno la stessa lunghezza, che $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = -1$ se $|i - j| = 1$, e che $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = 0$ se $|i - j| \geq 2$. Deduciamo che

$$s_2(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2, \quad s_3(s_2(\alpha_1)) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad \dots$$

e per induzione

$$\theta = w(\alpha_1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

Quindi

$$\theta - \alpha_1 = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$
$$\theta - \alpha_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$$

e per ogni $j \in \{2, \ldots, n-1\}$ abbiamo

$$\theta - \alpha_j = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1}) + (\alpha_{j+1} + \ldots + \alpha_n)$$

In ogni caso, questi elementi sono combinazioni lineari a coefficienti non negativi di radici semplici, cioè $\theta - \alpha_i \geq 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Parte (2). Osserviamo che

$$\alpha_2 + \ldots + \alpha_n = (s_n \circ \ldots \circ s_3)(\alpha_2)$$

(con stessa dimostrazione fatta nella parte (1)), e che

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1} = (s_{n-1} \circ \ldots \circ s_2)(\alpha_1)$$

quindi $\theta - \alpha_1$ e $\theta - \alpha_n$ sono radici.

Sia ora $j \in \{2, \ldots, n-1\}$. Abbiamo

$$\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} = (s_{j-1} \circ \ldots \circ s_2)(\alpha_1)$$

e

$$\gamma = \alpha_{j+1} + \ldots + \alpha_n = (s_n \circ \ldots \circ s_{j+2})(\alpha_{j+1})$$

Quindi β e γ sono radici. Sappiamo inoltre che ogni radice qui ha la stessa lunghezza, perché ogni radice può essere mandata in una radice semplice da un elemento del gruppo di Weyl.

D'altronde β e γ sono ortogonali, quindi la loro somma non può avere la loro stessa lunghezza. Deduciamo che $\theta - \alpha_j$ non è una radice.

Parte (3). Dobbiamo calcolare i prodotti scalari fra θ e le radici semplici. Sia

$$C = \frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{2}$$

e osserviamo che

$$C = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}$$

per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Allora abbiamo

$$(\alpha_i, \alpha_j) = C\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$$

per ogni $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Segue:

$$(\theta, \alpha_1) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \alpha_1) = C(2 - 1 + 0 + \ldots + 0) = C > 0$$

e

$$(\theta, \alpha_n) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \alpha_n) = C(0 + \ldots + 0 - 1 + 2) = C > 0$$

Inoltre, per $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, abbiamo

$$(\theta, \alpha_j) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \alpha_j) = C(0 + \ldots + 0 - 1 + 2 - 1 + 0 + \ldots + 0) = 0$$

quindi θ è nella chiusura della camera di Weyl fondamentale.

Esercizio 4. Sia n un intero positivo e si consideri[2] $L = \mathfrak{so}(2n)$.

(1) Si dimostri che L ha una sottoalgebra isomorfa a $\mathfrak{gl}(n)$.
(2) Si dimostri che L non ha sottoalgebre isomorfe a $\mathfrak{gl}(n+1)$.

Soluzione esercizio 4. Parte (1). Si consideri l'insieme M delle matrici $2n \times 2n$ della forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

dove A è una matrice $n \times n$ qualsiasi, e A' è la "trasposta" di A rispetto alla diagonale secondaria. Abbiamo visto a lezione, e si verifica facilmente, che M è un sottoinsieme di $\mathfrak{so}(2n)$. Si verifica facilmente che

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

è un omomorfismo iniettivo $\mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{so}(2n)$ di algebre di Lie, e che la sua immagine è M.

Parte (2). Questa parte è piuttosto difficile. Si supponga che $\mathfrak{so}(2n)$ abbia una sottoalgebra isomorfa a $\mathfrak{gl}(n+1)$, per assurdo. Allora contiene anche una sottoalgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(n+1)$. Sia

[2] Ricordiamo che si tratta dell'algebra di Lie delle matrici $A \in \mathfrak{gl}(2n)$ tali che $AJ + JA^t = 0$, dove J ha tutte entrate uguali a 1 sulla diagonale secondaria, e zeri altrove.

$\varphi\colon \mathfrak{sl}(n+1) \to \mathfrak{so}(2n)$ l'omomorfismo di algebre di Lie corrispondente. Visto che $\mathfrak{so}(2n) \subset \mathfrak{gl}(2n)$, possiamo considerare φ come una rappresentazione di $\mathfrak{sl}(n+1)$.

Sia H una sottoalgebra torale massimale di $\mathfrak{sl}(n+1)$. Allora, per la "compatibilità" della decomposizione di Jordan-Chevalley con le rappresentazioni delle algebre di Lie semisemplici, tutti gli elementi di $\varphi(H)$ sono elementi semisemplici di $\mathfrak{so}(2n)$.

In altre parole $\varphi(H)$, che ha dimensione n, è una sottoalgebra di Lie torale di $\mathfrak{so}(2n)$. A lezione abbiamo visto che $\mathfrak{so}(2n)$ ha una sottoalgebra torale massimale K di dimensione n (fatta dalle matrici diagonali che appartengono a $\mathfrak{so}(2n)$), quindi $\varphi(H)$ è torale massimale.

D'altronde $\mathfrak{gl}(n+1)$ ha un centro Z non banale, in somma diretta con $\mathfrak{sl}(n+1)$: le matrici scalari. Otteniamo che $\varphi(Z+H)$ è una sottoalgebra abeliana di $\mathfrak{so}(2n)$, che contiene strettamente la sottoalgebra torale massimale $\varphi(H)$ di $\mathfrak{so}(2n)$. Segue che il centralizzatore di $\varphi(H)$ in $\mathfrak{so}(2n)$ contiene $\varphi(Z+H)$, cioè contiene strettamente $\varphi(H)$.

Ma a lezione abbiamo visto che una qualsiasi sottoalgebra torale massimale di un'algebra di Lie semisemplice è uguale al suo centralizzatore: assurdo.