

Es. 1: 1) Ricoprta. aperto che non ammette sottoric. finiti:

$$Q = \left\{ \left] \frac{1}{n}, 1 \right[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$$

$$2) R = \left\{ \left[0, 1 - \frac{1}{n} \right[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$$

$$3) R = \left\{ \left(\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{n} \right[\cup \left] \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}, 1 \right] \right) \cap \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 4} \right\}$$

Es. 2: Consid. l'applicaz. $f: A \times S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$(a, q) \longmapsto a + q$$

L'immagine $f(\{a\}^{\varepsilon A} \times S^{m-1})$ è l'insieme $\{a + q \mid \|q\| = 1\}$

cioè è C_a , quindi l'immagine $\text{Im}(f)$ è tutto K .

Il dominio $A \times S^{m-1}$ è compatto (prodotto di compatti), quindi l'immagine K è compatta.

Es. 3: 1) Ric. aperto che non ha sottoric. finiti:

$$R = \left\{ [n, n+1[\mid n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2) \{1\} = Y \cap \underbrace{[1, 2[}$$

↑ aperto in X in questa topologia

3) Ric. aperto di Y senza sottoric. finiti:

$$P = \left\{ \underbrace{\left[0, 1 - \frac{1}{n} \right[}_{\substack{\uparrow \\ \text{aperti di } X \text{ contenuti} \\ \text{in } Y}} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \right\} \cup \left\{ \underbrace{\{1\}}_{\substack{\uparrow \\ \text{aperto in } Y \text{ dal} \\ \text{punto 2) dell'esercizio}} \right\}$$

Es. 4: Sia R ric. aperto di $X = X_1 \cup \dots \cup X_m$ con X_i sottosp. compatto $\forall i$. Visto che X_i è compatto, esiste una sottofam. R_i di R t.c.

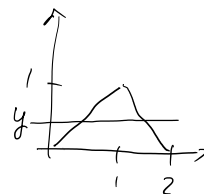
$$X_i \subseteq \bigcup_{A \in R_i} A$$

(basta osservare che $\{A \cap X_i \mid A \in R\}$ è un ric. aperto di X_i , ed estrarre da esso un numero finito di insiemi A che ricoprono X_i).

Allora $R_1 \cup \dots \cup R_m$ è un sottovic. finito di R .

Es. 5: Le proprietà 1) e 2) sono ovvie. La controimm.

di $y \in [0, 1]$ è:



$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } y=0 \\ \{1\} & \text{se } y=1 \end{cases}$$

$$\{y, 2-y\} \text{ se } y \in]0, 1[\leftarrow \text{(perché } f(y)=y \text{ e } f(x)=y \text{ con } y=2-x, \text{ da cui } x=2-y \text{)}$$

Si tratta sempre di insiemi finiti, quindi sono compatti.

4) Sia $A \subseteq [0, 2[$ aperto; per ogni $a \in A$ scegliamo un intervallo I_a contenente a , che sia aperto in $[0, 2[$, e contenuto in A :

- se $a=0$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $I_a = [0, \varepsilon[\subseteq A$;
- se $a \in]0, 1[$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $I_a =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq A \cap]0, 1[$
- se $a=1$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $I_a =]1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\subseteq A$
- se $a > 1$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $I_a =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subseteq A \cap]1, 2[$

Allora: $f(I_a) = [0, \varepsilon[$ nel 1° caso

$f(I_a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ nel 2° caso

$f(I_a) =]1 - \varepsilon, 1]$ nel 3° caso

$f(I_a) =]2 - a - \varepsilon, 2 - a + \varepsilon[$ nel 4° caso

e in tutti i casi queste immagini sono aperte in $[0, 1]$.

Allora $f(A) = f\left(\bigcup_{a \in A} I_a\right) = \bigcup_{a \in A} f(I_a) =$ aperto in $[0, 1]$.

Es. 6: Sia \mathcal{R} ricoprimento aperto qualsiasi di X . Per ogni

$p \in X$ scegliamo $U_p \in \mathcal{R}$ e $A_p \in \mathcal{B}$ tali che

$$p \in A_p \subseteq U_p$$

La famiglia $\{A_p \mid p \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X

fatto di elem. di B : estraiamo un sottoc. finito

$\{A_{p_1}, \dots, A_{p_m}\}$:

$$X = A_{p_1} \cup \dots \cup A_{p_m}$$

Allora $X = \bigcup_{p_1} \dots \bigcup_{p_m}$, cioè abb. trovato un sottoc. finito di R .

Es. 7: \Rightarrow Se K è compatto allora è limitato, altrimenti non potrei estrarre un sottoc. finito dal ricoprimento

$$\left\{ K \cap]-N, N[{}^m \mid N \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$$

Quindi $\exists a \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c. $K \subseteq [-a, a]^m$.

Quindi K è compatto in $[-a, a]^m$ che è T2, per cui K è chiuso in $[-a, a]^m$ che è chiuso in \mathbb{R}^m , quindi K è chiuso in \mathbb{R}^m .

\Leftarrow Sia K chiuso e limitato, e sia $a \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c.

$K \subseteq [-a, a]^m$. Allora K è chiuso nel compatto

$[-a, a]^m$ (che è compatto perché $[-a, a]$ è omeom.

a $[0, 1]$ che è compatto, e prodotti (finiti) di compatti sono compatti).

Segue: K è compatto.

Es. 8: 1) Sia $A_i \in \mathcal{T} \quad \forall i \in I$, supponiamo $A_i \neq \emptyset$ e

$A_i \neq \mathbb{R} \quad \forall i$. Allora

$A_i =]a_i, +\infty[$ per un $a_i \in \mathbb{R}$, e:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } \inf\{a_i \mid i \in I\} = -\infty \\]\inf\{a_i \mid i \in I\}, +\infty[& \text{se } \inf \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \sup\{a_i \mid i \in I\} = +\infty \\]\sup\{a_i \mid i \in I\}, +\infty[& \text{se } \sup \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Quindi unioni di elem. di \mathcal{T} e intersez. di elem. di \mathcal{T} sono tutte in \mathcal{T} (il caso in cui qualche A_i è \emptyset opp. \mathbb{R} segue facilmente da quanto fatto).

2) \mathcal{T} è meno fine della top. euclidea, quindi anche la top. di sottosp. su Y è meno fine di quella euclidea. Allora ogni viz. aperto di Y rispetto alla top. di sottosp. indotta da \mathcal{T} è un ricopr. aperto anche in top. euclidea: segue che ammette sottoric. finiti perché Y è compatto in top. euclidea.

W non è compatto: $R = \left\{ \left] 0 + \frac{1}{n}, +\infty[\cap W \mid n \in \mathbb{Z}_{>1} \right\}$

è un ricoprimento aperto di W senza sottoc. finiti.

Z è compatto: sia R ric. aperto di Z , sia $A \in R$ aperto che contiene 0 , allora $A = B \cap Z$ dove B è un aperto di X contenente 0 . Un tale B contiene per forza tutto $[0, +\infty[$, quindi anche Z , cioè $\{A\}$ è un sottoc. di R .

Es. 9: 1) $\{f(K_n^o)\}$ è un ricoprimento ^{aperto} di Y , perché $\{K_n^o\}$ è un ric. ap. di X . Visto che $\{0\} \times [0,1]$ è in Y ed è compatto, esiste una sottoc. finita $f(K_{m_1}^o), \dots, f(K_{m_m}^o)$ tale che $\{0\} \times [0,1] \subseteq f(K_{m_1}^o) \cup \dots \cup f(K_{m_m}^o)$ e allora basta prendere $N = \max\{m_1, \dots, m_m\}$.

2) Si dice facilmente che $X \setminus K_n$ è connesso per archi, quindi è connesso.

3) $Y \setminus f(K_N)$ è sconnesso perché non interseca $\{0\} \times [0,1]$, quindi è contenuto nell'unione disgiunta $(]-\infty, 0[\times [0,1]) \cup (]0, +\infty[\times [0,1]) = F$

Se per assurdo $Y \setminus f(K_N)$ fosse connesso, allora sarebbe contenuto in F_1 o in F_2 , perché sono aperti e chiusi in F .

Ma allora $f(K_N)$ non potrebbe essere limitato, ed è assurdo perché $f(K_N)$ è compatto.

4) $f|_{X \setminus K_N} : X \setminus K_N \rightarrow Y \setminus f(K_N)$ sarebbe un omeom., contraddicendo 2) e 3).

Es. 10: 1) $\bigcap_{A \in \mathcal{R}} A^c = \bigcap_{A \in \mathcal{R}} (P \setminus A) =$

$$= P \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A \right) = P \setminus P = \emptyset.$$

Se per assurdo avessimo $A_1^c \cap \dots \cap A_m^c = \emptyset$,

$$\begin{aligned} \text{allora } P &= P \setminus (A_1^c \cap \dots \cap A_m^c) = (P \setminus A_1^c) \cup \dots \cup (P \setminus A_m^c) = \\ &= A_1 \cup \dots \cup A_m \end{aligned}$$

cioè avremmo trovato un s.n.c. finito: assurdo.

2) Osserviamo che P è non vuoto, perché non compatto.

Allora \mathcal{R} è non vuoto, prendiamo un $A \in \mathcal{R}$, e osserviamo che P stesso e $A^c \cup \{\infty\}$ sono elem. di \mathcal{R} , quindi di \mathcal{I} , quindi di \mathcal{B} . Ma

$$Q = P \cup (A^c \cup \{\infty\})$$

perciò abbiamo scritto Q come unione di elem. di \mathcal{B} .

Siano ora $E_1, E_2 \in \mathcal{I}$, cioè entrambi sono intersez. di un numero finito di elem. di \mathcal{B} . Allora anche $E_1 \cap E_2$ è in \mathcal{I} , perché è anch'esso intersez. di un numero finito di elem. di \mathcal{B} .

Segue: \mathcal{B} è base di una qualche topologia su Q .

3) $q(\bar{D})$ è chiuso perché \bar{D} è chiuso e q è chiusa. Inoltre D contiene le coppie (x, x) $\forall x \in P$, perciò $q(D)$ già esso contiene P .

4) Supp. per assurdo che $\{\infty\}$ sia aperto in \mathcal{Q} , scriviamolo come unione di elem. di \mathcal{B} : possiamo usare solo \emptyset e $\{a, b\}$, quindi $\{\infty\} \in \mathcal{B}$. Cioè $\{\infty\}$ è intersez. finita di elem. di \mathcal{I} . Gli unici elem. di \mathcal{I} che contengono ∞ sono del tipo

$A^c \cup \{\infty\}$ per qualche $A \in \mathcal{R}$, dunque esistono $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{R}$ t.c. $\{\infty\} = (A_1^c \cup \{\infty\}) \cap \dots$

$\cap (A_m^c \cup \{\infty\})$. Segue $A_1^c \cap \dots \cap A_m^c = \emptyset$, perché nessun A_i^c contiene ∞ . Questo contraddice 1), quindi $\{\infty\}$ non è aperto in \mathcal{Q} .

5) Visto che $\{\infty\}$ non è aperto in \mathcal{Q} , il suo complementare $P = \mathcal{Q} \setminus \{\infty\}$ non è chiuso in \mathcal{Q} , quindi la sua chiusura contiene strettamente P . Cioè \bar{P} contiene anche ∞ , cioè P è denso in \mathcal{Q} . Allora anche $q(\bar{D})$ è denso in \mathcal{Q} , ed essendo chiuso deve

coincidere con tutto \mathbb{Q} . Allora $q(\bar{D}) \ni \infty$.

Di conseguenza \bar{D} deve contenere punti che si proiettano su ∞ tramite q , cioè punti del tipo (x, ∞) per qualche $x \in P$.

6) Sia U intorno di x in P e $A \in \mathcal{R}$, allora

$A^c \cup \{\infty\}$ è un aperto in \mathbb{Q} cont. ∞ , quindi è un intorno di ∞ in \mathbb{Q} . Il prodotto $U \times (A^c \cup \{\infty\})$ allora è un intorno di (x, ∞) in $P \times \mathbb{Q}$, perciò interseca D .

7) Supp. per assurdo $x \notin A^c$ per un $A \in \mathcal{R}$, allora A è un intorno di x in P . Per 6), il prodotto

$A \times (A^c \cup \{\infty\})$ interseca D , cioè $\exists y \in P \mid$

$(y, y) \in A \times (A^c \cup \{\infty\})$, cioè $y \in A$ e $y \in A^c$:

assurdo.