Es.1: Siano $x,y\in\mathbb{R}$ con $x\neq y$, possiamo supporre $x<y$. Allora

$$x\in\left[x,\tfrac{x+y}{2}\right[\text{ aperto}, \qquad y\in[y,y+1[\text{ aperto}$$

disgiunti

quindi $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey è T2.

Es.2: $\mathbb{R}$ con questa topologia non è di Hausdorff, infatti ad es. ogni aperto contenente $\frac{1}{2}$ contiene anche l'intervallo $]0,1[$, perché non ci sono elementi della base che contengono $\frac{1}{2}$ ma non $]0,1[$. Quindi non esistono intorni disgiunti ad es. di $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ rispettivamente.

Es.3: (1) Sia $p=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$, allora $\{p\}$ è l'intersezione dei luoghi degli zeri dei polinomi $x-a_1, x-a_2, \dots, x-a_n$, quindi $\{p\}$ è chiuso.

(2) Se K è finito allora K^n ha solo un numero finito di punti, che sono tutti chiusi per il punto (1), quindi tutti i sottoinsiemi di K^n sono chiusi, quindi K^n ha top. discreta che è sempre T2.

(3) Con $n=1$: abbiamo visto che la top. di Zariski su $K=K^1$ è la topologia cofinita, che non è T2.

Con $n>1$: L'applicazione $\varphi: K\to K^n$, $a\mapsto(a,0,\dots,0)$ è un'immersione topologica, verifichiamolo. Intanto è iniettiva; poi sia $A\subseteq K^n$ aperto, allora esistono polinomi $f_i\in K[x_1,\dots,x_n]$ per $i\in I$ tali che

$$A=\bigcup_{i\in I}(K^n)_{f_i}$$

Allora $\varphi^{-1}(A) = \bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}((K^n)_{f_i})$. Inoltre

$\varphi^{-1}((K^n)_{f_i}) = \{ a \in K \mid f_i(a, 0, .., 0) \neq 0 \}$

è uguale a $K_{\tilde{f}_i} = \{ a \in K \mid \tilde{f}_i(a) = 0 \}$ dove $\tilde{f}_i \in K[x]$

è il polinomio in una variabile $\tilde{f}_i(x) = f_i(x, 0, .., 0)$.

Segue: $\varphi^{-1}(A)$ è aperto in K, quindi φ è continua.

Sia ora $B \subseteq K$ aperto, quindi esistono polinomi $g_j \in K[x]$ per $j \in J$ tali che

$$B = \bigcup_{j \in J} K_{g_j}$$

Poniamo $\bar{g}_j(x_1, .., x_n) = g_j(x_1)$, come polinomio in n variabili,

e consid. $D = \bigcup_{j \in J} (K^n)_{\bar{g}_j}$, aperto in K^n.

Vale $\varphi^{-1}(D) = \bigcup_{j \in J} \varphi^{-1}((K^n)_{\bar{g}_j})$

ma $\varphi^{-1}((K^n)_{\bar{g}_j}) = \{ a \in K \mid \underbrace{\bar{g}_j(a, 0, .., 0)}_{\substack{\shortparallel \\ g_j(a)}} \neq 0 \} = K_{g_j}$

quindi $\varphi^{-1}(D) = B$ per cui φ è un'immersione.

Allora l'immagine di φ è omeomorfa a $K = K^1$ che non è T2,
ma quest'immagine è un sottospazio di K^n, che quindi non può essere T2.

Es. 4: Per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$ scegliamo intorni aperti U_{ij} di x_i e U_{ji} di x_j tali che $U_{ij} \cap U_{ji} = \emptyset$. Per ogni i poniamo

$$U_i = \bigcap_{k \neq i} U_{ik}$$

che è un aperto contenente x_i, e per $i \neq j$ vale

$$U_i \cap U_j \subseteq U_{ij} \cap U_{ji} = \emptyset$$

quindi $U_i \cap U_j = \emptyset$.

Es. 5: Sappiamo che $B = \{ p \in X \mid f(p) = g(p) \}$ è chiuso in X, d'altronde contiene A che è denso, per cui $B = X$.

Es. 6: Siano $p, q \in X$ con $p < q$. Sappiamo che esiste almeno un numero irrazionale $\xi \in]p, q[$, quindi possiamo scrivere X come unione disgiunta di due aperti non vuoti:

$$X = \underbrace{(]-\infty, \xi[\cap X)}_{\text{contiene } p} \cup \underbrace{(X \cap]\xi, +\infty[)}_{\text{contiene } q}$$

Es. 7: (1) segue da (2)

(2) Siano $p, q \in Y$ con $p < q$, allora ricordiamo che $]-\infty, q[$ e $[q, +\infty[$ sono aperti in X.

Quindi possiamo scrivere Y come unione disgiunta di due aperti non vuoti:

$$Y = \left( ]-\infty, q[\cap Y \right) \cup \left(Y \cap [q, +\infty[\right)$$

$\nwarrow$ contiene p $\qquad$ $\nwarrow$ contiene q

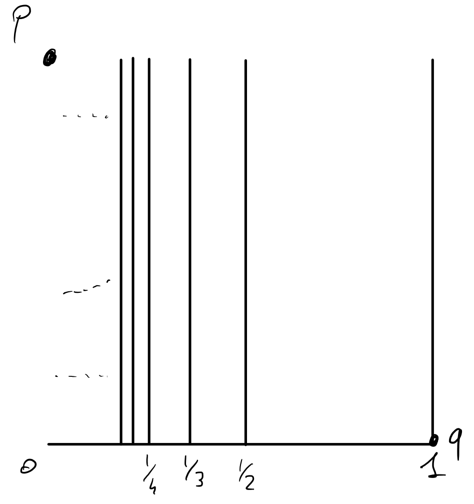
<u>Es. 8</u>: (1) Sia $f: X \to Y$ un omeomorfismo, e sia $y = f(x)$. Allora $f|_{X \setminus \{x\}} : X \setminus \{x\} \longrightarrow Y \setminus \{y\}$ è biiettiva e continua per quanto già visto (restrizioni su dominio e codominio di appl. continue sono continue). Per lo stesso motivo l'inversa è continua, quindi $X \setminus \{x\}$ e $Y \setminus \{y\}$ sono omeomorfi.

(2) Sia $x = 0 \in [0,1[= X$, allora $X \setminus \{x\} =]0,1[$ è connesso. Ma $\forall y \in Y =]0,1[$ vale $Y \setminus \{y\} =]0,y[\cup]y,1[$ è sconnesso. Quindi non esiste alcun $y \in Y$ tale che $X \setminus \{x\}$ e $Y \setminus \{y\}$ sono omeomorfi. Per la parte (1), X e Y qui non possono essere omeomorfi.

<u>Es. 9</u>: Sia per assurdo $\alpha : [0,1] \longrightarrow X =$ pettine con la pulce un cammino da $p = (0,1)$ a $q = (1,0)$. Consideriamo

$$A = X \cap \left(\mathbb{R} \times]0, +\infty[\right) \quad (= \text{pulce} + \text{denti del pettine})$$

aperto in X. Vale $\alpha^{-1}(A)$ è aperto in $[0,1]$, ed è un aperto proprio di $[0,1]$ perché $\alpha(1) = q \notin A$. Il complementare $B = [0,1] \setminus \alpha^{-1}(A)$ è un chiuso non vuoto in $[0,1]$, sono i valori del param. t tali che $\alpha(t)$ è sulla base del pettine.



Consid. $b = \inf B \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ è chiuso} \\ \text{e limitato}}}{=} \min B$, è il primo valore del param. t tale che $\alpha(t)$ è sulla base del pettine. Allora $\alpha(b) \in [0,1] \times \{0\}$, mentre $\alpha([0,b[) \subseteq A$, inoltre $\alpha([0,b[)$ è connesso. La proiezione di A sulla prima coordinata è l'insieme $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} = D$, la proiezione di $\alpha([0,b[)$ è connessa, contiene 0, ed è contenuta in D, quindi la proiezione di $\alpha([0,b[)$ è $\{0\}$.

L'unico punto di A che si proietta su zero è la pulce $(0,1)$, quindi $\alpha([0,b[) = \{(0,1)\}$, e invece $\alpha(b) \in [0,1] \times \{0\}$, quindi

α non può essere continua in b: assurdo.

<u>Es. 10:</u> 1) Sia $A \subseteq X$ aperto e chiuso. Sappiamo che $Y \subseteq A$ opp. $A \cap Y = \emptyset$, e $Z \subseteq A$ opp. $A \cap Z = \emptyset$ perché Y e Z

sono connessi. Se $Y \subseteq A$ allora A interseca anche Z,

quindi $X = Y \cup Z \subseteq A$ cioè $X = A$.

Se $Y \cap A = \emptyset$ allora Y non può contenere Z, quindi $Y \cap Z = \emptyset$

e vale $A = \emptyset$ perché $X = Y \cup Z$.

2) Siano $p, q \in X$. Se p e q sono entrambi in Y o entrambi in Z allora sappiamo già che esiste un cammino da p a q.

Supp. allora p e q siano uno in Y e uno in Z, e scegliamo $r \in Y \cap Z$. Esistono cammini α da p a r e β da r a q, quindi il cammino

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow X$$
$$t \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 0] \end{cases}$$

percorre tutto α per t da 0 a $\frac{1}{2}$, poi tutto β per t da $\frac{1}{2}$ a 1.

Quindi γ è continuo e va da p a q.