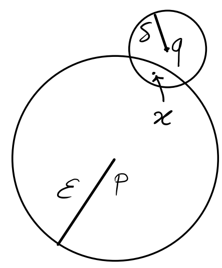
Es. 1 $\quad A = B_\varepsilon(p)$, $D = B_\varepsilon(q)$ con $\varepsilon = \frac{d(p,q)}{2}$.

Gli insiemi A e D sono aperti e disgiunti, e contengono rispettivam. p e q.

Es. 2: (1) Sia q aderente a $C_\varepsilon(p)$, quindi $\forall \delta > 0 \ \exists x \in C_\varepsilon(p) \mid d(x,q) < \delta$. Stimiamo la distanza da p a q:



$$d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) \leq \varepsilon + \delta \qquad \forall \delta > 0$$

Segue: $d(p,q) \leq \varepsilon$, cioè $q \in C_\varepsilon(p)$, che allora è chiuso.

(2) La topologia è discreta quindi tutti i sottoins. sono aperti e chiusi, perciò $\overline{B_1(p)} = B_1(p) = \{p\}$

perchè tutti gli altri punti sono a distanza ≥ 1 da p

D'altronde $C_1(p) = X$ perchè tutti i punti sono a distanza ≤ 1 l'uno dall'altro. Segue:

$$C_1(p) \neq \overline{B_1(p)}.$$

Es. 3 : (1) Verifichiamo gli assiomi di distanza:

1) $\bar{d}(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$, e $\bar{d}(x,y)=0 \iff x=y$: OVVIO

2) $\bar{d}(x,y)=\bar{d}(y,x) \quad \forall x,y \in X$: OVVIO

3) $\bar{d}(x,y)+\bar{d}(y,z) \overset{?}{\geq} \bar{d}(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$

Verifica:

a) Se $d(x,y), d(x,z), d(y,z) < 1$ allora la dis. triangolare per $\bar{d}$ è la stessa che per d, quindi vale.

b) Supp. $d(x,y) \geq 1$, allora la dis. triang. per $\bar{d}$ diventa

$1+\bar{d}(y,z) \geq \bar{d}(x,z)$ che è sempre vera perché $\bar{d}$ non assume mai valori >1.

Analogam. vale se supp. $d(y,z) \geq 1$.

c) Supp. $d(x,z) \geq 1$, allora la dis. triang. per d implica $d(x,y) \geq 1$ opp. $d(y,z) \geq 1$, e ci riportiamo al caso b).

(2) Osserviamo che $\bar{d}(x,y) \leq d(x,y) \quad \forall x,y$, per cui

$$B_\varepsilon^{\bar{d}}(p)=\{x \in X \mid \underbrace{\bar{d}(p,x)<\varepsilon}_{\substack{\Uparrow \\ (\bar{d}(p,x) \leq d(p,x)<\varepsilon}}\} \supseteq \{x \in X \mid d(p,x)<\varepsilon\}=B_\varepsilon^d(p)$$

(3) Se $d(x,y)<1$ allora $\bar{d}(x,y)=d(x,y)$, e se $\varepsilon<1$ allora $d(p,x)<1 \quad \forall x \in B_\varepsilon^d(p)$, da cui

se $\varepsilon < 1$ allora $B^{\bar{d}}_{\varepsilon}(p) = B^{d}_{\varepsilon}(p)$, da cui $\underset{\left(\overset{\text{"}}{\varepsilon}\right)}{B^{\bar{d}}_{\delta}}(p) \subseteq B^{d}_{\varepsilon}(p)$.

Supp. invece $\varepsilon \geq 1$, e poniamo $\delta = \frac{1}{2}$.

Abb.: $\forall x \in B^{\bar{d}}_{\delta}(p)$: $\bar{d}(p,x) < \frac{1}{2} < 1$, quindi per ogni

tale x abb. $\bar{d}(p,x) = d(p,x)$, da cui $d(p,x) < \frac{1}{2} < \varepsilon$.

Ma allora $x \in B^{d}_{\varepsilon}(p)$, da cui $B^{\bar{d}}_{\delta}(p) \subseteq B^{d}_{\varepsilon}(p)$.

(4) Segue da un corollario visto a lezione (l'ultimo sugli spazi metrici).

Es. 4: (1) Verifichiamo gli assiomi di distanza:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$, e $d(x,y) = 0 \iff x = y$: <u>OVVIO</u>

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$: <u>OVVIO</u>

3) Da dim.: $d(x,y) + d(y,z) \overset{(?)}{\geq} d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$

Se $x=y$ opp. $y=z$ allora la dis. triangolare è ovvia, e anche se $x = z$. Supp. allora x,y,z tutti diversi, e

scriviamo $x-y = p^{s}\frac{a}{b}$, $y-z = p^{t}\frac{c}{d}$

con $s,a,b,t,c,d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, e a,b,c,d non divis. per p,

per cui $d(x,y) = p^{-s}$, $d(y,z) = p^{-t}$. Calcoliamo $d(x,z)$:

$$x - z = (x-y) + (y-z) = p^{s}\frac{a}{b} + p^{t}\frac{c}{d} = \ldots$$

Possiamo supporre $s \geq t$, altrimenti scambiamo x con z.

Allora
$$\dots = p^t \left(\frac{a}{b} + p^{s-t} \frac{c}{d} \right) = p^t \left(\frac{ad + p^{s-t} bc}{bd} \right).$$

Sappiamo che ad e bd non sono divisibili per p. Allora se $s > t$ non può essere divisibile per p neppure il numeratore $ad + p^{s-t} bc$, quindi abbiamo scritto $x-z$ nel modo giusto per calcolare la distanza $d(x,z)$, e vale

$$d(x,z) = p^{-t} = d(y,z)$$

da cui $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ è vera.

Supp. invece $s = t$, allora il numeratore $ad + bc$ potrebbe essere divisibile per p (ma non il denominatore bd). Quindi si possono mettere eventualm. in evidenza potenze di p nell'espressione di $x-z$. Segue che $x-z$ si può scrivere come

$$x - z = p^{\tilde{t}} \frac{r}{bd}$$

con r non divisibile per p, e $\tilde{t} \geq t$. Allora

$$d(x,y) = p^{-t} = d(y,z), \qquad d(x,z) = p^{-\tilde{t}}$$

Da cui
$$d(x,y) + d(y,z) = 2p^{-t} \geq 2p^{-\tilde{t}} > p^{-\tilde{t}} = d(x,z)$$

quindi vale la disuguaglianza triang. anche in questo caso.

(2) Sia $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $|p^{-N}| < \varepsilon$. Allora $\forall n \geq N$, $n \in \mathbb{Z}$ vale

$|p^{-n}| < \varepsilon$, quindi basta prendere $y = x + p^n$ e abb.

$$d(x,y) = |p^{-n}| < \varepsilon .$$

(3) Dati $n \geq m$ abb. $p^n - p^m = p^m \big(\overbrace{p^{n-m} - 1}^{\text{non divisibile per } p}\big)$, da cui

$$d(p^n, p^m) = |p^{-m}|$$

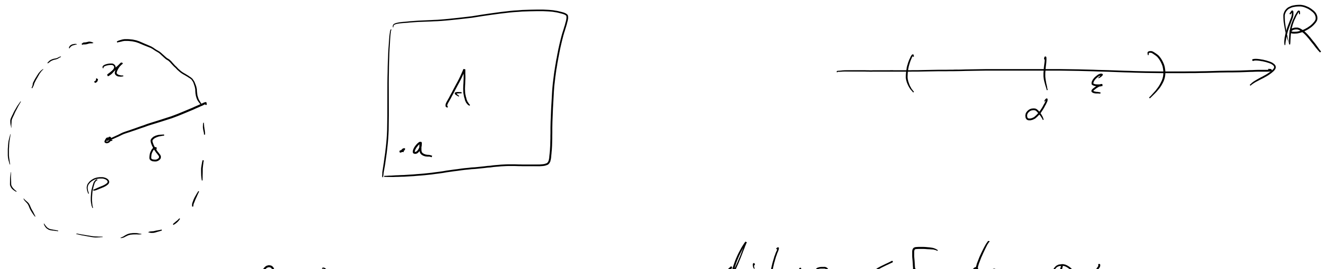
quindi, fissato $\varepsilon > 0$, se n e m sono abb. grandi vale

$$d(p^n, p^m) < \varepsilon .$$

Es. 5: Verifichiamo la continuità con la definizione: sia $D \subseteq \mathbb{R}$ aperto

poniamo
$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (f = d(-, A))$$
$$x \longmapsto d(x, A)$$

e dimostriamo che $f^{-1}(D)$ è aperto. Sia $p \in f^{-1}(D)$, allora $\alpha = d(x, A) \in D$. Visto che D è aperto in $\mathbb{R}$ (sottointeso: in topologia euclidea) esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(\alpha) \subseteq D$



Stimiamo $f(x)$ per un x a distanza $< \delta$ da p:

$$f(x) = \inf_{a \in A} d(x, a), \quad \text{ma} \quad d(x,a) \leq d(x,p) + d(p,a) < \delta + \alpha .$$

Inoltre
$$\underbrace{d(p,a)}_{= \alpha} \leq \underbrace{d(p,x)}_{< \delta} + d(x,a)$$

da cui $\quad \alpha - \delta < \alpha - d(p,x) \leq d(x,a)$. Concludiamo che

$$\alpha - \delta < d(x,a) < \alpha + \delta$$

Quindi se fissiamo $\delta < \varepsilon$, abbiamo che $f(x) \in B_\varepsilon(\alpha)$, da cui $f(x) \in D$, cioè $x \in f^{-1}(D)$. In altre parole abb. dim. che esiste $\delta > 0$ t.c. $B_\delta(x)$ è cont. in $f^{-1}(D)$, da cui $f^{-1}(D)$ è aperto. Allora f è continua.

$\square$

<u>Es. 6</u>: $\Rightarrow)$ Se C è chiuso in Y allora $A = Y \setminus C$ è aperto in Y, cioè esiste $B \subseteq X$ aperto in X t.c. $A = B \cap Y$, consid. $D = X \setminus B$ che è chiuso in X, vale

$$D \cap Y = (X \setminus B) \cap Y = Y \setminus B = Y \setminus (Y \cap B) = Y \cap A = C$$

$\Leftarrow)$ Sia $C \subseteq Y$ tale che esiste $D \subseteq X$ chiuso in X con $C = X \cap D$, consid. $B = X \setminus D$ che è ap. in X e $A = Y \cap B$ che è aperto in Y. Vale

$$Y \setminus C = Y \setminus (X \cap D) = Y \setminus D = Y \cap (X \setminus D) = Y \cap B = A$$

da cui C è chiuso in Y.

Es. 7: Sia $A \subseteq Y$ aperto in Y, quindi esiste $D \subseteq X$ aperto in X t.c. $A = Y \cap D$. Scriviamo D come unione di elem. di $\mathcal{B}$:

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i \quad , \quad D_i \in \mathcal{B} \ \forall i,$$

allora

$$A = Y \cap D = Y \cap \left(\bigcup_{i \in I} D_i \right) = \bigcup_{i \in I} (Y \cap D_i)$$

e $Y \cap D_i \in \mathcal{B}'$ $\forall i$, quindi $\mathcal{B}'$ è una base di Y.

Es. 8: (1) $[0,1[\, = \,]-1,1[\cap Y = [-1,1] \cap Y$ quindi $[0,1[$ è aperto e chiuso in Y.

(2) $]2,3] =]2,4[\cap Y$ quindi $]2,3]$ è aperto in Y, ma non è chiuso in Y perché se esistesse $D \subseteq \mathbb{R}$ chiuso tale che $D \cap Y =]2,3]$ allora 2 sarebbe aderente a D, quindi avrei $2 \in D$, e anche $2 \in D \cap Y$: falso.

(3) $C = [\frac{1}{2}, 1[\cup \{2\} = \underbrace{\left([\frac{1}{2}, 1] \cup \{2\} \right)}_{\leftarrow \text{chiuso in } \mathbb{R}} \cap Y$ quindi C è chiuso in Y. Però non è aperto, perché se avessi $B \subseteq X$ aperto t.c. $C = Y \cap B$ allora B conterrebbe un intervallo $]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$ con $0 < \varepsilon < 1$, e allora C conterrebbe l'intervallo $[2, 2+\varepsilon[$: falso.

Es. 9 : Y non ha topologia discreta, perché $\{0\}$ non è aperto in Y.

Infatti, se per assurdo $A=\{0\}$ fosse ap. in Y esisterebbe $B\subseteq X$ aperto in X t.c. $A=Y\cap B$, ma B conterrebbe un intervallo del tipo $]-\varepsilon,\varepsilon[$ per un $\varepsilon>0$, che contiene sicuramente anche punti di Y del tipo $\frac{1}{n}$ per n abbastanza grande.

Es. 10 : Sappiamo che

$$\mathcal{B}=\{U\times V \mid U\subseteq P,\ V\subseteq Q \text{ aperti}\}$$

è una base della top. prodotto su $P\times Q$, quindi ogni aperto di $P\times Q$ si può scrivere come unione di elem. di $\mathcal{B}$.

Dimostriamo che ogni elem. di $\mathcal{B}$ si può scrivere come unione di elem. di

$$\mathcal{B}'=\{U\times V \mid U\in\mathcal{B}_P,\ V\in\mathcal{B}_Q\}$$

Sia $U\times V\in\mathcal{B}$, scriviamo U e V come unioni

$$U=\bigcup_{i\in I}U_i, \qquad V=\bigcup_{j\in J}V_j$$

dove $U_i\in\mathcal{B}_P\ \forall i$, $V_j\in\mathcal{B}_Q\ \forall j$. Allora

$$U\times V=\left(\bigcup_{i\in I}U_i\right)\times\left(\bigcup_{j\in J}V_j\right)=$$

$$= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \underbrace{(U_i \times V_j)}_{\in \mathcal{B}'}$$

Segue che ogni aperto di $P \times Q$ si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}'$.

<u>Es.11</u>: 1) Sì: una base della top. prodotto è, nel nostro caso:

$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \in \{\emptyset, P\},\ V \in \{\emptyset, Q\} \} =$$

$$= \{ \underbrace{\emptyset \times \emptyset}_{=\emptyset}, \underbrace{\emptyset \times Q}_{=\emptyset}, \underbrace{P \times \emptyset}_{=\emptyset}, P \times Q \} = \{\emptyset, P \times Q\}$$

e unendo elem. di $\mathcal{B}$ ottengo solo $\emptyset$ e $P \times Q$.

2) Sì, perché dati $x \in P$, $y \in Q$ l'insieme $\{(p,q)\}$ è aperto. Questo perché $\{(p,q)\} = \underbrace{\{p\}}_{\text{aperto in } P} \times \underbrace{\{q\}}_{\text{aperto in } Q}$.

<u>Es.12</u>: Sia $C \subsetneq P \times Q$ chiuso, allora

$(P \times Q) \setminus C$

è aperto, quindi si può scrivere come unione di aperti della base solita:

$$(P\times Q)\setminus C = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$$

dove $U_i \subseteq P$, $V_i \subseteq Q$ sono aperti. L'unione non è vuota perché $C \neq P\times Q$, inoltre possiamo supporre $U_i, V_i \neq \emptyset$ $\forall i$.

Abbiamo

$$C = \bigcap_{i\in I} (P\times Q)\setminus (U_i\times V_i)$$

Ora: $(P\times Q)\setminus(U_i\times V_i) = \{(x,y)\in P\times Q \mid (x,y)\notin U_i\times V_i\} =$

$= \{(x,y)\in P\times Q \mid x\notin U_i \text{ opp. } y\notin V_i\} =$

$= \left(\left(P\setminus U_i\right)\times Q\right) \cup \left(P\times (Q\setminus V_i)\right)$

Quindi

$$C = \bigcap_{i\in I} \left(\left(\left(P\setminus U_i\right)\times Q\right) \cup \left(P\times (Q\setminus V_i)\right)\right)$$

Osserviamo che $P\setminus U_i$ e $Q\setminus V_i$ sono chiusi finiti, perché U_i e V_i sono non vuoti. Chiamiamo $C_i := \left(\left(P\setminus U_i\right)\times Q\right)\cup\left(P\times(Q\setminus V_i)\right)$.

Fissiamo $i_0\in I$ e poniamo $F = Q\setminus V_{i_0}$; abbiamo

$$C_{i_0}\setminus (P\times F) \subseteq (P\setminus U_{i_0})\times Q$$

da cui $p\left(C_i \setminus (P\times F)\right) \subseteq p\left((P\setminus U_{i_0})\times Q\right) = P\setminus U_{i_0}$

che è un insieme finito. Ora basta osservare che

$$p\left(C\setminus (P\times F)\right) \subseteq p\left(C_{i_0}\setminus (P\times F)\right).$$

Dimostriamo che la topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$ non è la topologia prodotto su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dove su ciascuna copia di $\mathbb{R}$ mettiamo la top. di Zariski. Sappiamo che la top. di Zariski su $\mathbb{R}$ è la top. cofinita. Ora, consid. $C = \Delta = \{(x_1,x_1)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\in\mathbb{R}\}$.

E' un chiuso di Zariski, perché è il luogo degli zeri del polinomio $f\in\mathbb{R}[x_1,x_2]$ dato da $f(x_1,x_2) = x_1 - x_2$.

Ma non esiste un sottoinsieme finito $F\subseteq\mathbb{R}$ tale che la proiezione di $C\setminus(\mathbb{R}\times F)$ è un insieme finito. Quindi C non è chiuso in topologia prodotto.

<u>Es. 13</u>: Sia $Q = \{q_1,\dots,q_n\}$, sia $C\subseteq P\times Q$ chiuso.

L'intersezione $C\cap(P\times\{q_i\})$ è chiusa in $P\times\{q_i\}$ $\forall i$,

quindi la proiezione $p\left(C\cap(P\times\{q_i\})\right)$ è chiusa in P $\forall i$.

Infine

$$p(C) = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} C \cap (P \times \{q_i\})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} p(C \cap (P \times \{q_i\}))$$

quindi $p(C)$ è chiuso in P.

Es. 14: Basta osservare che i „rettangoli semiaperti"

$$[a,b[\times [c,d[$$

sono aperti in topologia prodotto, ponendo sui fattori $\mathbb{R}$ la top. di Sorgenfrey. Allora $\forall p = (x,-x) \in \nabla$ abbiamo:

$$\{p\} = \nabla \cap ([x,x+1[\times [-x,-x+1[)$$

è aperto in ∇: