Es. 1: $\Rightarrow$) Sia D denso e $A \subseteq X$ non vuoto. Supp. per assurdo $D \cap A = \emptyset$, da cui $D \subseteq X \setminus A$, che è un chiuso proprio di X. Segue $\overline{D} \subseteq X \setminus A \subsetneq X$: assurdo

$\Leftarrow$) Supp. D intersechi ogni ap. non vuoto, supp. per assurdo D non denso: $\overline{D} \subsetneq X$. Allora D non interseca l'aperto non vuoto $X \setminus \overline{D}$: assurdo.

Es. 2: 1) a) $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}]-n, n[$

b) $]a,b[\cap]c,d[= \begin{cases} \emptyset & \text{opp.} \\ ]\max\{a,c\}, \min\{b,d\}[\end{cases}$

2) $([0,1[)^\circ =]0,1[$, $\overline{[0,1[} = [0,1]$

$]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[^\circ =]1,2[$ $\overline{]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[} = [0,3]$

Es. 3: Sappiamo che i chiusi di $X = \mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}$ stesso opp. sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$. Fra questi, solo $\mathbb{R}$ contiene $[0,1]$, quindi

$$\overline{[0,1]} = \bigcap_{\substack{C \subseteq \mathbb{R} \\ C \text{ chiuso} \\ C \supseteq [0,1]}} C = \mathbb{R}$$

Es. 4: Falso, ad es. $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ (con top. cofinita) non è denso, perché è chiuso quindi $\overline{\emptyset} = \emptyset \neq \mathbb{R}$.

Però è vero che ogni sottoinsieme infinito è denso.

Es. 5: $\Rightarrow$) Sia $U \subseteq X$ aperto e sia $p \in U$. L'insieme U è un intorno di p, basta scegliere $A = U$ nella def. di intorno.

$\Leftarrow$) Sia $U \subseteq X$ intorno di ciascun suo punto. Per ogni $p \in U$ scegliamo A_p aperto tale che $p \in A_p \subseteq U$.

Vale allora $$U = \bigcup_{p \in U} A_p$$ perciò U è aperto.

Es. 6: 1) Abbiamo U intorno di p, e $V \supseteq U$. Sappiamo che esiste A aperto tale che $p \in A \subseteq U$, ma vale anche $p \in A \subseteq V$, da cui V è intorno di p.

2) Sia A aperto con $p \in A \subseteq U$, e sia A' aperto

con $p \in A' \subseteq U'$. Allora

$p \in \underbrace{A \cup A'}_{\uparrow \text{aperto}} \subseteq U \cup U'$ per cui $U \cup U'$ è intorno di p,

$p \in \underbrace{A \cap A'}_{\uparrow \text{aperto}} \subseteq U \cap U'$ per cui $U \cap U'$ è int. di p.

Es. 7: Supp. $x \in \overline{D}$ e dim. che $D \cap U \neq \emptyset$ $\forall U \in J$.

Dato $U \in J$, U è un intorno di x quindi sappiamo già che interseca D.

Viceversa, supp. $D \cap U \neq \emptyset$ $\forall U \in J$ e dim. che $x \in \overline{D}$.

Lo dimostriamo verificando che $W \cap D \neq \emptyset$ per ogni intorno W di x. Dato W, esiste $U \in J$ t.c. $U \subseteq W$. Sappiamo $U \cap D \neq \emptyset$, ma da questo segue $W \cap D \neq \emptyset$.

Es. 8: 1) J_1: non è un sist. fond. di intorni, infatti $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ è un intorno di 0 ma non contiene elem. di J_1.

2) J_2 è un sist. fond. di intorni

3) J_3 non è un sistema fond. di intorni: i suoi elem. non sono intorni di 0.

Es. 9: Se f è continua allora $f^{-1}(A)$ è aperto $\forall A \in \mathcal{B}$.

Viceversa, supp. $f^{-1}(A)$ aperto $\forall A \in \mathcal{B}$, e sia $D \subseteq Y$ aperto qualsiasi. Scriviamolo come unione di aperti $A_i \in \mathcal{B}$ per $i \in I$:

$$D = \bigcup_{i \in I} A_i \quad , \quad \text{allora} \quad f^{-1}(D) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(A_i)}_{\uparrow \text{ aperto } \forall i}$$

da cui $f^{-1}(D)$ è aperto, quindi f è continua.

Es. 10: 1) f aperta $\iff$ $f(B)$ aperto $\forall B \subseteq X$ aperto $\iff$ $(f^{-1})^{-1}(B)$ aperto $\forall B \subseteq X$ aperto $\iff$ f^{-1} continua

2) f omeom. $\iff$ f continua e f^{-1} continua $\underset{\uparrow \text{ per } 1)}{\iff}$ f continua e aperta

3) Se f è biiettiva allora f aperta $\iff$ f chiusa, perché se f è aperta, dato $C \subseteq X$ chiuso vale

$$f(C) = Y \setminus \underbrace{f(X \setminus C)}_{\nwarrow \text{aperto}} \quad \text{è chiuso,}$$

e analogam. se f è aperta è anche chiusa. Quindi 3) segue da 2).

Es. 11: Sia $A \subseteq Y$ aperto. Se $A \ni p$ allora $f^{-1}(A) = X$ è aperto.
Se $A \not\ni p$ allora $f^{-1}(A) = \emptyset$, aperto. Quindi f è continua.

Es. 12: Verifichiamo la continuità su un ap. della base

$$\{ Y_g \mid g \in \mathbb{R}[x] \}$$

dove $Y = \mathbb{R}$, $Y_g = \{ x \mid g(x) \neq 0 \}$.

Vale $f^{-1}(Y_g) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) \in Y_g \} =$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(f(x_1, x_2)) \neq 0 \} = X_{g \circ f}$

dove $X = \mathbb{R}^n$, e $X_{g\circ f} = \{ (x_1, x_2) \mid (g \circ f)(x_1, x_2) \}$ è un elem. della base della top. di Zariski su $\mathbb{R}^2$. Quindi f è continua.

Es. 13: Se $f: X \to Y$ è aperta, allora consideriamo tutto X: è un aperto in X, quindi $f(X)$ è aperto in Y. Analogam., se f è chiusa allora $f(X)$ è chiuso in Y perché X è (anche) chiuso in X.

con top. euclidea

Sia allora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione costante $x \mapsto 0$. La sua immagine è $\{0\}$ che non è aperto in $\mathbb{R}$, quindi f non è aperta (ma è continua).

Sia invece $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'applicazione $g(x) = e^x$. La sua immagine è l'intervallo $]0, +\infty[$ che non è chiuso in $\mathbb{R}$, quindi g non è chiusa (ma è continua).

Es. 14: Verifichiamo la continuità con i chiusi: $\pi^{-1}(C)$ dev'essere chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso, cioè $C = \mathbb{R}$ opp. C è un insieme finito.

Allora $\pi^{-1}(C) = C \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$; se $C = \mathbb{R}$ allora $\pi^{-1}(C) = \mathbb{R}^2 = X$ è aperto in X per qualsiasi topologia, quindi andrà fatta la verifica solo per C finito (non vuoto, perché anche $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ è sempre aperto).

(1) Se $X = \mathbb{R}^2$ ha top. cofinita, dato C finito non vuoto la sua controimmagine $C \times \mathbb{R}$ è un sottoinsieme proprio e infinito di $\mathbb{R}^2$, e allora non è chiuso. Segue: π non è continua.

(2) È facile dim. che $\mathbb{R}^2 \setminus (C \times \mathbb{R})$ è aperto in top. euclidea, per cui π è continua se X ha top. euclidea.

(3) Sia $C = \{p_1, \dots, p_n\}$, allora $\pi^{-1}(C) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \{p_1, \dots, p_n\}\}$

$= V(f)$ dove $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ è il polinomio

$f(x_1, x_2) = (x_1 - p_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - p_n)$.

Segue: $\pi^{-1}(C)$ chiuso e π continua.

Es. 15: Falso, ad es. l'appl. dell'esercizio 11 è continua anche se Y non ha top. banale.