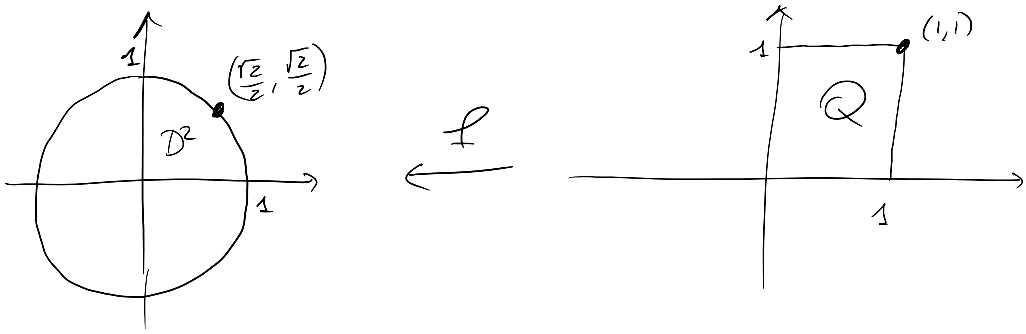
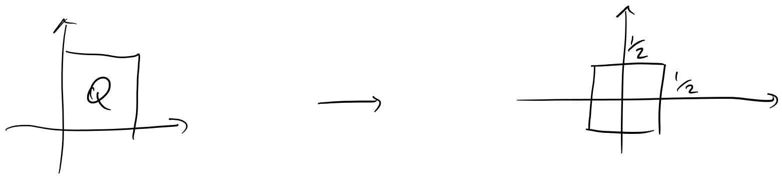
Soluzioni foglio n. 1, Geometria 2, 2023-2024

Es. 1:

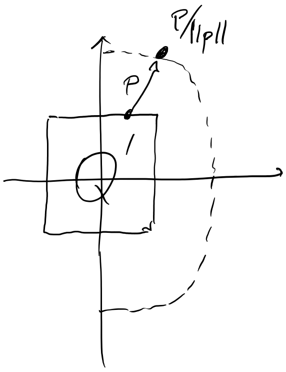


Costruisco f così:

1) f trasla Q in modo che sia centrato in $(0,0)$



2) Dato un punto sul bordo del quadrato, f rinormalizza il punto mandandolo in $\frac{p}{\|p\|}$



3) Se p non è sul bordo, invece di normalizzarlo lo riscalo a seconda della norma. Oss.: il bordo di Q' è fatto dai punti (a,b) tali che $\max\{|a|,|b|\} = \frac{1}{2}$.

Quindi: dato $(a,b) \in Q$, chiamo $(a',b') = (a-\frac{1}{2}, b-\frac{1}{2})$, poi pongo

$$f(a,b) = (a',b') \cdot \frac{\max\{|a'|,|b'|\}}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}} \cdot 2$$

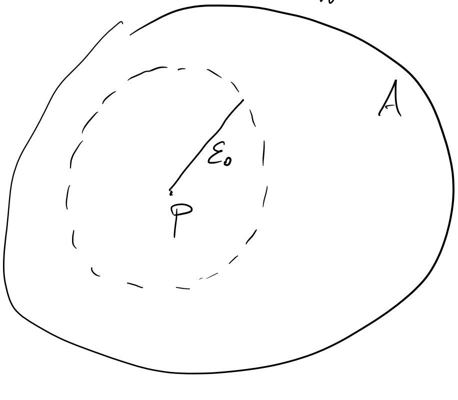
Ad es. $(1,1) \in Q$ viene mandato in

$$f(1,1) = \left(1-\frac{1}{2},\, 1-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\max\left\{ \left|\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{1}{2}\right| \right\}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}} \cdot 2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in S^1$$

<u>Es. 2</u>: Supp. per assurdo esista $g : [0,2] \longrightarrow [0,1] \cup \,]2,3]$ continua biiettiva. C'è un punto $x \in [0,2]$ tale che $f(x) = 1$, e c'è un punto $y \in [0,2]$ tale che $f(y) = 3$. Consid. g come applicaz. $[0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua: ogni valore fra 1 e 3 dev'essere assunto (teorema del valor medio), ma questo è assurdo perché ad es. $2 \notin [0,1] \cup \,]2,3]$.

<u>Es. 3</u>: Supp. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, dim. che $C = \mathbb{R}^n \setminus A$ è chiuso, quindi sia $p \in \mathbb{R}^n$ sia aderente a C. Cioè $\forall \varepsilon > 0 \; \exists c_\varepsilon \in C \,|\, \|p - c_\varepsilon\| < \varepsilon$. Supp. per assurdo $p \notin C$, cioè $p \in A$, allora $\exists \varepsilon_0 > 0$



tale che per <u>ogni</u> $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfa $\|p - x\| < \varepsilon_0$ vale $x \in A$, ma c_{ε_0} è in C: assurdo.

Viceversa, supp. $C = \mathbb{R}^n \setminus A$ chiuso, dim. che A è aperto.

Sia $p \in A$, allora $p \notin C$, quindi p <u>non</u> è aderente a C.

Allora $\exists \varepsilon > 0 \mid$ per ogni x tale che $\|x-p\| < \varepsilon$ vale $x \notin C$,

cioè $x \in A$, e allora A è aperto.

Es. 4: 1) Sia $X = \{a, b\}$ di cardinalità 2, cioè $a \neq b$.

Abbiamo la top. banale $\{\emptyset, X\}$ e quella discreta

$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$. Sia T una topologia,

supp. non banale e non discreta, quindi T contiene un

sottoinsieme diverso da $\emptyset$ e da X, ma non entrambi $\{a\}$ e $\{b\}$.

Uniche possibilità:

$T = \{\emptyset, \{a\}, X\}$ oppure $T = \{\emptyset, \{b\}, X\}$

e si vede facilmente che sono entrambe topologie.

2) Dato $X = \{a, b, c, d, e\}$ con $|X| = 5$, ad es.

$T = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}, X\}$

è una topologia (verifica immediata)

Es. 5: La famiglia $\mathcal{B}_1$ è base della top. euclidea, in pratica

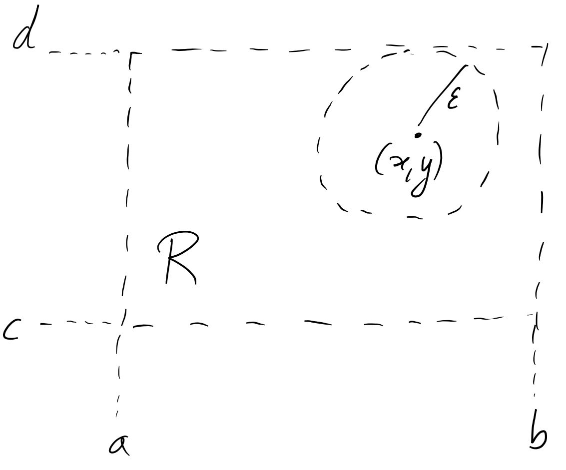
per definizione. Infatti A è aperto se e solo se

$\forall p \in A \ \exists \varepsilon_p > 0 \mid B_{\varepsilon_p}(p) \subseteq A$, da cui

$$A = \bigcup_{p \in A} B_{\varepsilon_p}(p).$$

Inoltre sappiamo che $B_{\varepsilon_p}(p)$ è aperto in top. euclidea, quindi $\mathcal{B}_1$ è una famiglia di aperti e ogni aperto si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}_1$ (anche l'insieme vuoto, come unione della famiglia vuota).

Verifichiamo con la fam. $\mathcal{B}_2$. Intanto verifichiamo che $\mathcal{B}_2$ è fatta di aperti: dato un rettangolo aperto $]a, b[\times]c, d[= R$ e un punto $p = (x, y)$,



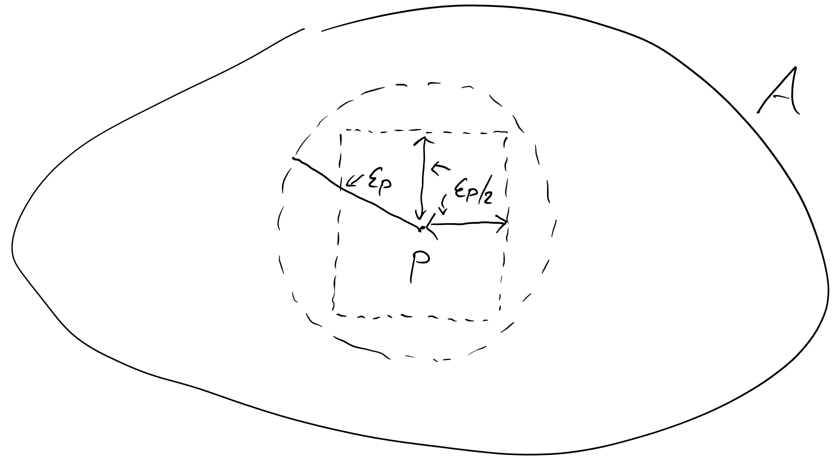
poniamo

$$\varepsilon = \min\{x-a,\ b-x,\ y-c,\ d-y\} \ (>0)$$

e oss. che ogni q tale che $\|p-q\| < \varepsilon$ soddisfa $q \in R$. Cioè $B_\varepsilon(p) \subseteq R$, da cui R è aperto.

Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, e per ogni $p \in A$ scegliamo $\varepsilon_p > 0$ come prima.

Sia $p = (x, y)$



Osserviamo che per ogni $q \in \underbrace{]x-\frac{\varepsilon_p}{2}, x+\frac{\varepsilon_p}{2}[\times]y-\frac{\varepsilon_p}{2}, y+\frac{\varepsilon_p}{2}[}_{R_p}$

abbiamo $\|p-q\| < \varepsilon_p$, quindi il rettangolo aperto R_p

è contenuto nel disco aperto $B_{\varepsilon_p}(p)$. Quindi

$$A = \bigcup_{p \in A} R_p$$

da cui $\mathcal{B}_2$ è base della top. euclidea.

Es. 6: Verifichiamo le condiz. 1) e 2) della proposizione vista a lezione, che assicurano l'esistenza di $\mathcal{T}$ data la famiglia $\mathcal{B}$ „candidata base".

1) Dobbiamo poter scrivere $\mathbb{R}$ come unione di elem. di $\mathcal{B}$, facile:

$$\mathbb{R} = \underbrace{]-\infty, 1[}_{\in \mathcal{B}} \cup \underbrace{]0, +\infty[}_{\in \mathcal{B}}$$

2) Dati $E, F \in \mathcal{B}$, dobbiamo poter scrivere $E \cap F$ come unione di elem. di $\mathcal{B}$. Se E, F sono intervalli aperti:

$E =]a, b[$, $F =]c, d[$ con $a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ $a < b$
$b, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ $c < d$

allora $E \cap F =]\max\{a, c\}, \min\{b, d\}[$ è un intervallo aperto (eventualmente vuoto!).

Se E e F sono intervalli privati di $\mathbb{Z}$, allora

$E =]a,b[\setminus \mathbb{Z}$, $\quad F =]c,d[\setminus \mathbb{Z}$ $\quad$ (a,b,c,d come prima)

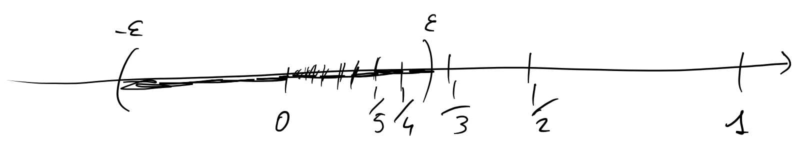
e vale $E \cap F = \underbrace{\left(]a,b[\cap]c,d[\right)}_{\uparrow \text{intervallo ap.}} \setminus \mathbb{Z} \in \mathcal{B}$

Se invece E è un intervallo, e F è un intervallo privato di $\mathbb{Z}$:

$E =]a,b[$, $\quad F =]c,d[\setminus \mathbb{Z}$, $\quad$ vale

$E \cap F = \underbrace{\left(]a,b[\cap]c,d[\right)}_{\uparrow \text{intervallo ap.}} \setminus \mathbb{Z} \in \mathcal{B}$

e analogamente se E e F sono scambiati. Quindi $\mathcal{B}$ è base di una topologia. L'insieme $]-1,1[\setminus \mathbb{Z}$ è aperto per questa topologia, ma non è aperto in top. euclidea, perché contiene $0 \in \mathbb{R}$ ma non contiene <u>alcun</u> intervallo del tipo $]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[$ anche se ε è molto piccolo, perché in quell'intervallo ci sono sicuramente punti di $\mathbb{Z}$:



<u>Es. 7</u>: Verifichiamo gli assiomi di topologia:

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ per def., $\quad X \in \mathcal{T}$ perché $X \setminus X = \emptyset$ è un ins. finito.

2) Siano $A_i \in \mathcal{T}$ per ogni $i \in I$, consid. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Se $A_i = \emptyset$ $\forall i \in I$ allora $A = \emptyset$ è in $\mathcal{T}$.

Altrimenti sia $i_0 \in I$ tale che $X \setminus A_{i_0}$ è un insieme finito,

allora
$$X \setminus A = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) = (X \setminus A_{i_0}) \cap \Big(\bigcap_{i \in I \setminus \{i_0\}} (X \setminus A_i) \Big)$$

è un insieme finito perché $X \setminus A_{i_0}$ è finito. Segue: $A \in T$.

3) Dati $A_1, A_2 \in T$, consid. $B = A_1 \cap A_2$. Se A_1 opp. A_2 è vuoto, allora $B = \emptyset$ è in T. Altrim. $X \setminus A_1$ è finito e anche $X \setminus A_2$, allora

$$X \setminus B = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$ è finito quindi è in T.

Se X è un insieme finito allora la topologia cofinita è discreta.
Se la top. cofinita è discreta allora $X = X \setminus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aperto}}}{\emptyset}$ è vuoto oppure un insieme finito, cioè X è un insieme finito.

<u>Es. 8</u> : (1) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto per la top. cofinita. Se $A = \emptyset$ allora è aperto in top. euclidea, altrim. $\mathbb{R} \setminus A$ è un ins finito, cioè $\mathbb{R} \setminus A = \{p_1, \dots, p_m\}$ (opp. $\mathbb{R} \setminus A = \emptyset$). Poss. supporre $p_1 < p_2 < \dots < p_m$, e allora

$$A =]-\infty, p_1[\cup]p_1, p_2[\cup \dots \cup]p_{m-1}, p_m[\cup]p_m, +\infty[$$

(opp. $A = \mathbb{R}$) e A è aperto in top. euclidea.

(2) Supp. per assurdo esistano A, B aperti disgiunti con $A \ni p$, $B \ni q$. Allora $A, B \neq \emptyset$, per cui $\mathbb{R} \setminus A$ e $\mathbb{R} \setminus B$ sono sottoins. finiti. Ma $A \cap B = \emptyset$ implica $(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R}$, da cui seguirebbe $\mathbb{R}$ finito: assurdo.

(3) basta prendere $\varepsilon = \frac{1}{2} d(p,q)$ e
$A = B_\varepsilon(p)$, $B = B_\varepsilon(q)$.

Es. 9: Per ogni $x \in X$ l'insieme $\{x\}$ è aperto per la top. discreta, quindi $\{x\}$ si deve poter scrivere come unione di elem. di $\mathcal{B}$, cioè c'è almeno un elem. di $\mathcal{B}$ che cont. x e nessun altro punto. Questo elem. di $\mathcal{B}$ è proprio $\{x\}$.

Es. 10: 1) Sia $f \in K[x]$ polinomio, l'insieme $X_f = \{ p \in K \mid f(p) \neq 0 \}$ ha come complementare $V(f) = \{ p \in K \mid f(p) = 0 \}$ che è tutto K (se $f \equiv 0$) oppure un ins. finito di punti.

Quindi gli insiemi $\{ X_f \mid f \in K[x] \}$ che sono una base della top. di Zariski sono anche aperti in top. cofinita. Segue: la top. di Zariski è meno fine della top. cofinita.

Viceversa, sia $A \subseteq K$ aperto in top. cofinita: se $A = \emptyset$ allora $A = X_f$ con $f \equiv 1$, invece se $A = K$ allora $A = X_f$ con $f \equiv 0$, invece se $K \setminus A = \{p_1, \dots, p_d\}$ finito non vuoto allora

$A = X_f$ con $f = (x-p_1) \cdots (x-p_d)$.

Quindi la top. cofinita è meno fine della top. di Zariski su K.

2) Sia $C = V(S)$ con $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$, allora

$$C = \{p \in K^n \mid f(p) = 0 \ \forall f \in S\} = \bigcap_{f \in S} V(f)$$

quindi $K^n \setminus C = \bigcup_{f \in S} X_f$ da cui C è chiuso.

Viceversa, sia C chiuso, scriviamo $K^n \setminus C$ come unione di elem. della base, cioè sia $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ sottoins. t.c.

$$K^n \setminus C = \bigcup_{f \in S} X_f$$

da cui $C = \bigcap_{f \in S} V(f) = V(S)$.

3) Dato $p \in V(I)$, su p si annullano tutti gli elem. di S, perché $S \subseteq I$. Allora $p \in V(S)$, da cui $V(I) \subseteq V(S)$.

Viceversa, sia $p \in V(S)$ e sia $f \in I = (S)$. f è comb. lin. di elem. di S a coeff. polinomi, cioè esistono

$s_1, \dots, s_m \in S$, $\quad g_1, \dots, g_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ tali che

$$f = g_1 s_1 + \dots + g_m s_m$$

Allora $f(p) = g_1(p) \underbrace{s_1(p)}_{=0} + \dots + g_m(p) \underbrace{s_m(p)}_{=0} = 0$

da cui $p \in V(I)$. Segue $V(S) \subseteq V(I)$.

Es. 11: 1) Verifichiamo le condizioni date in una proposizione:

a) X è unione di elem. di $\mathcal{B}$: sì, basta prendere

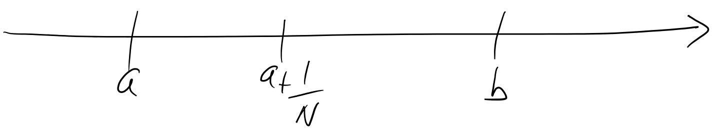
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$$

b) l'intersez. $[a,b[\cap [c,d[$ (con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a<b$, $c<d$) è vuota oppure uguale a

$[\max\{a,c\}, \min\{b,d\}[$

per cui è essa stessa un elem. di $\mathcal{B}$, oppure è unione vuota di elem. di $\mathcal{B}$.

2) Scegliamo $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $a + \frac{1}{N} < b$



Allora $\quad]a,b[= \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\geq N}} [a+\frac{1}{n}, b[$

3) Gli intervalli aperti $]a,b[$ con $a,b\in\mathbb{R}$ e $a<b$ formano una base della top. euclidea. Per il punto 2), possiamo scrivere ciascuno di essi come unione di aperti di Sorgenfrey, quindi ogni ap. euclideo è aperto di Sorgenfrey.
Inoltre $[0,1[$ non è aperto in top. euclidea.

4) $\mathbb{R}\setminus[a,b[=]-\infty,a[\cup [b,+\infty[=$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \left([a-n, a[\cup [b, b+n[\right)$$

aperti

quindi $[a,b[$ è anche chiuso.

Es. 12: Scriviamo X come unione di elem. di $\mathcal{B}=\{M_a \mid a\in X\}$, basta oss. che $a\in M_a$, da cui

$$X = \bigcup_{a\in X} M_a$$

Dati ora M_a, M_b con $a,b\in X$, consid. $M_a\cap M_b$.
Dato $c\in M_a\cap M_b$, vogliamo trovare un elem. N di $\mathcal{B}$ tale che

$c \in N \subseteq M_a \cap M_b$. Osserviamo che $c \geq a$ e $c \geq b$, quindi se $x \geq c$ allora $x \in M_a \cap M_b$. Quindi $M_c \subseteq M_a \cap M_b$, e allora basta prendere $N = M_c$. Cioè vale

$$M_a \cap M_b = \bigcup_{c \in M_a \cap M_b} M_c .$$