Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Francesco Meazzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.9

9.5.2023

Nota: gli esercizi 4, 5, e le parti (7), (8) dell'esercizio 3 richiedono il Teorema di Seifert-Van Kampen, che vedemo venerdì 10. maggio.

Esercizi sulla sezione **Proprietà funtoriali**:

Esercizio 1. Sia $D^n = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p\| \leq 1\}$. Dimostrare che

$$X = D^n \smallsetminus \{0\}$$

e

$$Y = \mathbb{R}^n \smallsetminus B_1(0)$$

hanno gruppo fondamentale isomorfo.

Esercizio 2. Siano $f, g \colon X \to Y$ applicazioni continue e omotope fra spazi topologici, e sia $a \in X$. Supponiamo $f(a) = g(a)$. Dimostrare che allora i sottogruppi $H = f_*(\pi_1(X, a))$ e $K = g_*(\pi_1(X, a))$ sono sottogruppi di $G = \pi_1(Y, f(a))$ fra loro coniugati.

Esercizi sulla sezione **Teorema di Seifert-Van Kampen**:

Esercizio 3. (**da sapere**) Sia n un intero positivo, consideriamo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, e dato $i \in \{0, \ldots, n\}$ sia A_i il sottoinsieme dei punti $p = [x_0, \ldots, x_n]$ tali che la coordinata omogenea x_i è diversa da 0. Sia inoltre $H_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \smallsetminus A_i$ il sottoinsieme dei punti la cui coordinata x_i è uguale a 0, e sia $B_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{[0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]\}$, dove la coordinata uguale a 1 è x_i. Svolgere i seguenti punti per qualsiasi $i \in \{0, \ldots, n\}$.

(1) Dimostrare che A_i è aperto in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e omeomorfo a $\mathbb{R}^n$.
(2) Dimostrare che H_i è chiuso in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$.
(3) Dimostrare che B_i è aperto in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = A_i \cup B_i$.
(4) Dimostrare che $A_i \cap B_i$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$.
(5) Dimostrare che H_i è retratto per deformazione di B_i.
(6) Svolgere i punti precedenti con $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ al posto di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ (e dapertutto $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$).
(7) Dedurre dal punto precedente (e per induzione su n) che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è semplicemente connesso per ogni $n \geq 0$.
(8) Perché non si può dedurre allo stesso modo che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è semplicemente connesso per ogni n?

Esercizio 4. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme finito, con $n \geq 3$. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \smallsetminus Y$ è semplicemente connesso.

Esercizio 5. Calcolare il gruppo fondamentale del seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0\}.$$

Altri esercizi:

Esercizio 6. Sia $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ la solita applicazione $t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Sia $I =]a, b[$ un intervallo con $a < b \in \mathbb{R}$ e $b - a < 1$. Dimostrare che $p|_I \colon I \to p(I)$ è un omeomorfismo fra I e la sua immagine $p(I) \subseteq S^1$. (*Suggerimento:* se I fosse compatto, che trucco useremmo?)