Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Francesco Meazzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.6

11.4.2023

Esercizi sulle sezioni **Identificazioni e quozienti topologici**:

Esercizio 1. (**da sapere**) Sia $f\colon X \to Y$ un'identificazione fra spazi topologici. Dimostrare che Y è di Hausdorff se e solo se dati $x, x' \in X$ tali che $f(x) \neq f(x')$ esistono due aperti di X disgiunti e saturi rispetto a f, uno contenente x e l'altro contenente x'.

Esercizio 2. Siano $X = \mathbb{R}^2$ e $\sim$ la relazione d'equivalenza su X data da $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $a = a'$ e $b - b' \in \mathbb{Z}$. Sia poi $\approx$ la relazione d'equivalenza su X data da $p \approx q$ se e solo se $p = q$ oppure $\|p\| = \|q\| > 1$, oppure $\|p\| \geq 2$ e $\|q\| \geq 2$.

(1) Determinare se i quozienti $X/\sim$ e $X/\approx$ sono compatti e se sono connessi.
(2) Determinare se i quozienti $X/\sim$ e $X/\approx$ sono di Hausdorff.

Esercizio 3. Dimostrare che $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/G$ dove G è il gruppo delle traslazioni per numeri interi

$$G = \{x \mapsto x + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

è aperta ma non chiusa.

Esercizio 4. Sia $G = \{\mathrm{id}_{\mathbb{C}}, \sigma\}$ il sottogruppo di omeomorfismi del disco unitario chiuso

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

in se stesso, dove $\sigma\colon D \to D$ è definita come $\sigma(z) = -z$ per ogni $z \in D$. Si dimostri che il quoziente D/G è omeomorfo a D. (*Suggerimento:* usare un'applicazione ben nota $f\colon D \to D$ tale che $f(z) = f(-z)$.)

Esercizio 5. Siano X uno spazio topologico di Hausdorff, e $K \subseteq X$ un sottospazio compatto. Consideriamo la relazione d'equivalenza $\sim_K$ che identifica fra loro tutti i punti di K. Dimostrare che $X/\sim_K$ è di Hausdorff.

Esercizio 6. (**da sapere**) Sia $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con topologia euclidea. Definiamo le seguenti relazioni d'equivalenza:

(1) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ (cioè uno è 0 e l'altro è 1) e $b = b'$;
(2) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ e $b + b' = 1$;
(3) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ e $b = b'$, oppure $\{b, b'\} = \{0, 1\}$ e $a = a'$;
(4) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ e $b + b' = 1$, oppure $\{b, b'\} = \{0, 1\}$ e $a + a' = 1$;
(5) $(a, b) \sim (a', b')$ se e solo se $(a, b) = (a', b')$, oppure $\{a, a'\} = \{0, 1\}$ e $b = b'$, oppure $\{b, b'\} = \{0, 1\}$ e $a + a' = 1$;

Intuitivamente, i quozienti $X/\sim$ sono ottenuti incollando alcuni dei lati del quadrato fra loro, certe volte nello stesso verso e certe volte "al contrario". Si possono visualizzare come le seguenti figure:

- il nastro di Möbius,
- la bottiglia di Klein,
- la superficie laterale di un cilindro,
- un toro bidimensionale (cioè $S^1 \times S^1$, cioè è la superficie di una ciambella).

L'esercizio consiste nel ricercare immagini di questi oggetti (se non li conoscete già), e riconoscere quale relazione d'equivalenza corrisponde a quale figura, immaginando come sono incollati i lati del quadrato fra loro. Notare che manca una figura: cercate di immaginare com'è fatta, la vedremo meglio più avanti durante il corso.

Esercizio 7. (**da sapere**) Ricordiamo la definizione degli spazi proiettivi reali e complessi (con $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$):

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}}{\sim}$$

dove

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0} \mid q = \lambda p$$

e

$$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}}{\sim}$$

dove

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}_{\neq 0} \mid q = \lambda p.$$

Su questi spazi proiettivi mettiamo la topologia quoziente indotta dalla topologia euclidea su $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ rispettivamente.

(1) Dimostrare che tutti questi spazi proiettivi sono connessi.
(2) Consideriamo la proiezione $\pi \colon \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e la sua restrizione $\pi|_{S^n}$ alla sfera unitaria $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dimostrare che la restrizione $\pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è suriettiva.
(3) Dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è compatto.
(4) Svolgere il punti precedenti con $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$.
(5) Trovare un gruppo G di omeomorfismi di $X = \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{0\}$ tale che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = X/G$, e analogamente con $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$.
(6) Consideriamo

$$D = \{(p, \lambda p) \in X \times X \mid p \in X, \lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}\}.$$

Dimostrare che D è chiuso in $X \times X$, e analogamente con $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$.
(7) Dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sono di Hausdorff.

Esercizio 8. Questo esercizio è tratto dal libro di Manetti, e mostra che il prodotto di identificazioni non è sempre un'identificazione. Siano $X = \mathbb{R}$ e $Y = \mathbb{R}/\sim$, dove $a \sim b$ se e solo se $a = b$ oppure $a, b \in \mathbb{Z}$. Sia $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ l'unione di tutte le rette di equazione

$$x + y = n + \frac{\sqrt{2}}{n}$$

al variare di $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dimostrare che

(1) la proiezione naturale $\pi \colon X \to Y$, $x \mapsto [x]$ è un'identificazione chiusa;
(2) il sottoinsieme C è chiuso in $X \times \mathbb{Q}$, e saturo rispetto all'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \pi \times \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} \colon & X \times \mathbb{Q} & \to & Y \times \mathbb{Q} \\ & (x, q) & \mapsto & ([x], q) \end{array}$$

(3) l'immagine $D = (\pi \times \mathrm{id}_{\mathbb{Q}})(C)$ non è chiusa in $Y \times \mathbb{Q}$, in particolare $(\pi(0), 0)$ è aderente a D ma non è in D;
(4) l'applicazione $\pi \times \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ non è un'identificazione.

Esercizi sulla sezione **Gruppi topologici**:

Esercizio 9. Dato $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dimostrare che $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ (cioè il gruppo delle matrici $n \times n$ a entrate in $\mathbb{R}$ e determinante 1) è connesso per archi. (*Suggerimento:* si può usare il fatto che $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ è generato da matrici della forma seguente: tutte le entrate uguali a quelle della matrice identità, tranne una sola entrata al di fuori della diagonale principale, entrata che invece può essere a piacere.)

Esercizio 10. Dato $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dimostrare che il gruppo delle matrici $n \times n$ ortogonali reali $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ e il gruppo delle matrici $n \times n$ unitarie complesse $\mathrm{U}(n)$ sono compatti.

Esercizi sulle sezioni **Numerabilità e successioni**:

Esercizio 11. Costruire un esempio di spazio metrico non 2°-numerabile.

Esercizio 12. (**da sapere**)

(1) Dimostrare che sottospazi e prodotti[1] di spazi 1°-numerabili sono 1°-numerabili.
(2) Dimostrare che sottospazi e prodotti di spazi 2°-numerabili sono 2°-numerabili.
(3) Dimostrare che prodotti di spazi separabili sono separabili.

Esercizio 13. (**da sapere**) Non sempre sottospazi di spazi separabili sono separabili, vediamo un esempio. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey.

(1) Dimostrare che $X \times X$ con topologia prodotto è separabile.
(2) Usare l'esercizio 5 del foglio 3 per trovare un sottospazio non separabile di $X \times X$.

Esercizio 14. (*difficile*) Sia X spazio metrico non compatto. Dimostrare che esiste $f\colon X \to \mathbb{R}$ continua non limitata.

[1] In questo esercizio per "prodotti" intendiamo i prodotti di due spazi topologici, entrambi del tipo indicato.