Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Francesco Meazzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.5

3.4.2023

Esercizi sulla sezione **Spazi topologici compatti**:

Esercizio 1. (**da sapere**) Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea.

(1) Dimostrare che $Y =]0, 1[$ con topologia di sottospazio non è compatto.
(2) Dimostrare che $Z = [0, 1[$ con topologia di sottospazio non è compatto.
(3) Dimostrare che $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ con topologia di sottospazio non è compatto.

Per ciascuno di questi sottospazi, esibire un ricoprimento aperto dal quale non è possibile estrarre un sottoricoprimento finito.

Esercizio 2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme compatto e si consideri

$$K = \bigcup_{a \in A} C_a$$

dove

$$C_a = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \|p - a\| = 1\}$$

è la sfera $(n-1)$-dimensionale di raggio 1 e centro a. Si dimostri che K è compatto.

Esercizio 3. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey, e sia $Y = [0, 1]$ con topologia di sottospazio.

(1) Dimostrare che X non è compatto.
(2) Dimostrare che $\{1\}$ è un sottoinsieme aperto in Y.
(3) Dimostrare che Y non è compatto.

Esercizio 4. (**da sapere**) Sia X spazio topologico uguale all'unione di un numero finito di sottospazi compatti. Dimostrare che X è compatto.

Esercizio 5. Diamo un controesempio a una proposizione vista a lezione, dove invece che f chiusa supponiamo f aperta. Sia $f\colon [0, 2[\to [0, 1]$ data da $f(x) = x$ se $x \in [0, 1]$, e $f(x) = 2-x$ se $x \in]1, 2[$. Dimostrare che

(1) f è continua e suriettiva,
(2) il codominio di f è compatto,
(3) $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in [0, 1]$,
(4) f è aperta. (*Suggerimento*: dato $A \subseteq [0, 2[$ aperto nel dominio, decomporre A in un'unione di intervalli del tipo $[0, a[$ con $0 < a < 1$, oppure $]b, c[$ con $0 < b < c < 1$, oppure $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ con $0 < \varepsilon < 1$, oppure $]d, e[$ con $1 < d < e < 2$.)

Osservare che però il dominio di f non è compatto.

Esercizio 6. (**da sapere**) Siano X uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ una sua base. Supponiamo che ogni ricoprimento aperto di X fatto solo con elementi di $\mathcal{B}$ ammetta un sottoricoprimento finito. Dimostrare che X è compatto.

Esercizio 7. (**da sapere**) Sia K un sottospazio topologico di $\mathbb{R}^n$ (con topologia euclidea). Dimostrare che K è compatto se e solo se è limitato e chiuso in $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 8. Consideriamo $\mathbb{R}$ con la seguente topologia:

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}, \varnothing, \ ]a, +\infty[\ \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Dimostrare che $\mathcal{T}$ è effettivamente una topologia[1].

[1] Questa è detta talvolta la *topologia della semicontinuità inferiore*. Perché?

(2) Determinare se i seguenti sottospazi sono compatti:

$$Y = [0, 1], \qquad Z = [0, 1[\ , \qquad W =]0, 1].$$

Esercizio 9. (**da sapere**) In questo esercizio usiamo connessione e compattezza per dimostrare che $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R} \times [0, 1]$ non sono omeomorfi. Usiamo una costruzione chiamata *esaustione in compatti*; la definizione generale si può trovare sul libro di Manetti. Definiamo i seguenti sottoinsiemi di X:

$$K_n = [-n, n]^2$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Osserviamo che K_n è compatto per ogni n (ad esempio grazie all'esercizio n.5), che

$$K_n^\circ =] - n, n[\ ^2$$

contiene K_{n-1} per ogni $n \geq 2$, e che vale

$$X = \bigcup_n K_n^\circ.$$

Supponiamo inoltre per assurdo che esista un omeomorfismo $f\colon X \to Y$.

(1) Dimostrare che possiamo fissare un $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che

$$f(K_N^\circ) \supseteq \{0\} \times [0, 1].$$

(2) Dimostrare che $X \smallsetminus K_N$ è connesso.
(3) Dimostrare che $Y \smallsetminus f(K_N)$ è sconnesso.
(4) Dedurre che f non può esistere, ottenendo l'assurdo desiderato e concludendo la dimostrazione che X e Y non sono omeomorfi.

Esercizio 10. (*difficile*) Con questo esercizio dimostriamo il "viceversa" di una proposizione vista a lezione: dato uno spazio topologico P, se la proiezione $q\colon P \times Q \to Q$ è chiusa per ogni spazio topologico Q, allora P è compatto. Procediamo per assurdo: supponiamo $q\colon P \times Q \to Q$ chiusa per ogni Q, ma P per assurdo non compatto. Sia $\mathcal{R}$ un ricoprimento aperto di P tale che non esista alcun sottoricoprimento finito.

(1) Denotiamo $A^c = P \smallsetminus A$ per ogni $A \in \mathcal{R}$. Dimostrare che dati comunque un numero finito di elementi $A_1, \ldots, A_n$ di $\mathcal{R}$, abbiamo

$$A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c \neq \varnothing,$$

però vale

$$\bigcap_{A \in \mathcal{R}} A^c = \varnothing.$$

(2) Sia ∞ un elemento non appartenente a P, consideriamo l'insieme $Q = P \cup \{\infty\}$, e consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi di Q:

$$\mathcal{S} = \mathscr{P}(P) \cup \{A^c \cup \{\infty\} \mid A \in \mathcal{R}\}.$$

Cioè la famiglia $\mathcal{S}$ è formata da tutti i sottoinsiemi di P, e poi anche i sottoinsiemi ottenuti prendendo un A^c con $A \in \mathcal{R}$ e aggiungendogli l'elemento ∞. Sia

$$\mathcal{B} = \{\text{intersezioni di un numero finito di elementi di } \mathcal{S}\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia su Q.

(3) Visto che P è contenuto in Q, possiamo definire il sottoinsieme $D = \{(x, x) \in P \times Q \mid x \in P\}$ del prodotto $P \times Q$. Sia $\overline{D}$ la chiusura di D in $P \times Q$. Dimostrare che $q(\overline{D})$ è chiuso in Q e contiene P (come sottoinsieme di Q).
(4) Dimostrare che $\{\infty\}$ non è aperto in Q, usando il punto (1).
(5) Usare il punto precedente per dimostrare che $q(\overline{D})$ contiene ∞, e che $\overline{D}$ contiene un punto del tipo (x, ∞) per qualche $x \in P$.
(6) Dimostrare che $U \times (A^c \cup \{\infty\})$ interseca D per ogni U intorno di x in P e per ogni $A \in \mathcal{R}$.
(7) Usando il punto precente e una scelta opportuna di U, dimostrare che $x \in A^c$ per ogni $A \in \mathcal{R}$. Si ottiene così una contraddizione col punto (1), completando la dimostrazione che P è compatto.