Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Francesco Meazzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.4

21.3.2024

Esercizi sulla sezione **Spazi di Hausdorff**:

Esercizio 1. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey. Dimostrare che X è di Hausdorff.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia descritta nell'esercizio 2 del foglio 2. Determinare se X è di Hausdorff.

Esercizio 3. Sia K un campo, e si consideri K^n con topologia di Zariski.

(1) Dimostrare che $\{p\}$ è un sottoinsieme chiuso di K^n per ogni $p \in K^n$.
(2) Dimostrare che K^n è di Hausdorff se K è un campo finito.
(3) Dimostrare che K^n non è di Hausdorff se K è un campo infinito e $n \geq 1$. (*Suggerimento*: $K = K^1$ non è di Hausdorff, inoltre esistono immersioni $K^1 \to K^n$.)

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e siano $x_1, \dots, x_n$ punti distinti di X. Dimostrare che esistono intorni $U_i \in \mathcal{I}(x_i)$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ tali che $U_i \cap U_j = \varnothing$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$.

Esercizio 5. (**da sapere**) Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue fra spazi topologici. Supponiamo che Y sia di Hausdorff, e che esista un sottoinsieme denso A in X tale che $f|_A = g|_A$. Dimostrare che $f = g$.

Esercizi sulla sezione **Spazi topologici connessi**:

Esercizio 6. Consideriamo $\mathbb{R}$ con topologia euclidea, e $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottospazio qualsiasi contenuto in $\mathbb{Q}$. Supponiamo che X abbia almeno due punti, dimostrare che X è sconnesso.

Esercizio 7. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey.

(1) Dimostrare che X è sconnesso.
(2) Sia Y un sottospazio di X, dimostrare che Y è sconnesso se ha almeno due punti.

Esercizio 8. (**da sapere**)

(1) Siano X e Y spazi topologici omeomorfi, e sia $x \in X$ un punto qualsiasi. Dimostrare che esiste un punto $y \in Y$ tale che $X \smallsetminus \{x\}$ e $Y \smallsetminus \{y\}$ sono omeomorfi (entrambi con topologia di sottospazio).
(2) Usare il punto precedente per dimostrare che $[0, 1[$ e $]0, 1[$ non sono omeomorfi.

Esercizio 9. (*difficile*) Dimostrare che il "pettine con la pulce"

$$X = ([0,1] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, t\right) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in [0,1] \right\} \cup \{(0,1)\}.$$

non è connesso per archi.

Esercizio 10. (**da sapere**) Sia X uno spazio topologico, supponiamo esistano due sottospazi Y, Z di X tali che $Y \cap Z \neq \varnothing$ e $X = Y \cup Z$.

(1) Dimostrare che X è connesso se Y e Z sono connessi.
(2) Dimostrare che X è connesso per archi se Y e Z sono connessi per archi.