Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Francesco Meazzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.3

14.3.2023

Esercizi sulla sezione **Spazi metrici**:

Esercizio 1. Sia X uno spazio metrico, e siano p, q punti distinti di X. Dimostrare che esistono due aperti di X disgiunti, uno che contiene p e uno che contiene q.

Esercizio 2. Sia (X, d) uno spazio metrico, siano $p \in X$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Consideriamo

$$C_\varepsilon(p) = \{x \in X \mid d(x, p) \leq \varepsilon\}.$$

(1) Dimostrare che $C_\varepsilon(p)$ è chiuso in X rispetto alla topologia indotta da d.

(2) Supponiamo X abbia almento due punti, e che d sia una distanza per cui $\mathcal{T}_d$ è la topologia discreta, ad esempio poniamo $d(x, y) = 1$ per ogni coppia di punti distinti x, y. Dimostrare che in questo caso

$$B_1(p) = \{p\}$$

e che

$$\overline{B_1(p)} = \{p\}$$

per ogni $p \in X$. Dimostrare inoltre che

$$C_1(p) = X$$

e concludere che non sempre $C_\varepsilon(p)$ è uguale alla chiusura di $B_\varepsilon(p)$.

Esercizio 3. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo la *limitazione standard* $\overline{d}$ di d nel modo seguente:

$$\overline{d}(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{se } d(x, y) < 1 \\ 1 & \text{se } d(x, y) \geq 1 \end{cases}$$

(1) Dimostrare che $\overline{d}$ è una distanza.

(2) Dimostrare che $B^{\overline{d}}_\varepsilon(p) \supseteq B^d_\varepsilon(p)$ per ogni $p \in X$ e ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.

(3) Dato $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, poniamo $\delta = \varepsilon$ se $\varepsilon < 1$ e invece $\delta = \frac{1}{2}$ se $\varepsilon \geq 1$. Dimostrare che $B^{\overline{d}}_\delta(p) \subseteq B^d_\varepsilon(p)$.

(4) Dedurre dai punti precedenti che d e $\overline{d}$ sono distanze equivalenti.

Esercizio 4. Sia $X = \mathbb{Q}$ e sia p un numero primo. Dati $x, y \in X$, scriviamo la differenza $z = x - y$ come

$$z = p^s \frac{a}{b}$$

dove $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ non sono divisibili per p, e $s \in \mathbb{Z}$. Poniamo allora

$$d(x, y) = p^{-s}.$$

se $x \neq y$, e poniamo invece $d(x, y) = 0$ se $x = y$. Questo definisce un'applicazione $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$.

(1) Verificare che d è una distanza; è detta distanza *p-adica*.

(2) Dimostrare che per ogni $x \in X$ e ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, ci sono elementi in $B_\varepsilon(x)$ di valore assoluto[1] arbitrariamente grande.

(3) Dimostrare che la successione p, p^2, p^3, $\ldots$, $x_n = p^n$, $\ldots$ è una successione di Cauchy, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ per ogni scelta di n, m interi $\geq N$.

[1] Intendiamo il valore assoluto usuale dei numeri razionali.

Esercizio 5. (**da sapere**) Sia (X, d) uno spazio metrico, fissiamo un sottoinsieme non vuoto qualsiasi $A \subseteq X$, e per ogni $x \in X$ definiamo la "distanza fra x e A" nel modo seguente:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} d(-, A)\colon & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$$

è continua.

Esercizi sulla sezione **Sottospazi topologici**:

Esercizio 6. (**da sapere**) Sia X uno spazio topologico, siano $Y \subseteq X$ un sottoinsieme qualsiasi e sia $C \subseteq Y$. Dimostrare che C è chiuso in Y in topologia di sottospazio se e solo se esiste un chiuso $D \subseteq X$ di X tale che $D \cap Y = C$.

Esercizio 7. (**da sapere**) Siano X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia su X. Dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{B}' = \{D \cap Y \mid D \in \mathcal{B}\}$$

è una base della topologia di sottospazio su Y.

Esercizio 8. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, consideriamo il sottoinsieme $Y = [0, 1[\cup [2, 3]$ con topologia di sottospazio. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di Y sono chiusi oppure aperti oppure entrambi, in ciascun caso determinando sottoinsiemi chiusi o aperti di X che abbiano intersezione con Y uguale agli insiemi dati:

(1) $[0, 1[$,
(2) $]2, 3]$,
(3) $\left[\frac{1}{2}, 1\right[\cup \{2\}$.

Esercizio 9. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, e consideriamo il seguente sottoinsieme con topologia di sottospazio:

$$Y = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

Determinare se Y ha topologia discreta.

Esercizi sulla sezione **Prodotti topologici**:

Esercizio 10. (**da sapere**) Sia P uno spazio topologico con base $\mathcal{B}$, e sia Q uno spazio topologico con base $\mathcal{B}'$. Dimostrare che

$$\{U \times V \mid U \in \mathcal{B},\ V \in \mathcal{B}'\}$$

è una base della topologia prodotto su $P \times Q$.

Esercizio 11. Se P e Q hanno entrambi topologia banale, anche il prodotto $P \times Q$ ha topologia banale? E se invece P e Q hanno entrambi topologia discreta, anche il prodotto $P \times Q$ ha topologia discreta?

Esercizio 12. (*difficile*) Siano P, Q spazi topologici entrambi con topologia cofinita e $P \times Q$ con topologia prodotto. Sia $C \subsetneq P \times Q$ un sottoinsieme proprio e chiuso, e sia $p\colon P \times Q \to P$ la proiezione sulla prima coordinata. Dimostrare che esiste un insieme finito di punti $F \subseteq Q$ tale che

$$p(C \setminus (P \times F))$$

è un insieme finito. Consideriamo ora $\mathbb{R}$ con topologia di Zariski; usare la prima parte dell'esercizio per dimostrare che la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è diversa dalla topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 13. Sia P uno spazio topologico qualsiasi, e sia Q uno spazio topologico con solo un numero finito di elementi. Dimostrare che la proiezione $p\colon P \times Q \to P$ sulla prima componente è un'applicazione chiusa.

Esercizio 14. Siano $P = Q = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey, consideriamo $P \times Q$ con topologia prodotto, e sia $\nabla = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale "del secondo e quarto quadrante", con topologia di sottospazio indotta dal prodotto $P \times Q$. Dimostrare che per ogni $p \in \nabla$ l'insieme $\{p\}$ è aperto in ∇, cioè ∇ ha topologia discreta.