Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Francesco Meazzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.2

7.3.2024

Esercizi sulla sezione **Parte interna, chiusura, intorni**:

Esercizio 1. (**da sapere**) Siano X spazio topologico e $D \subseteq X$. Dimostrare che D è denso se e solo se D interseca ogni aperto non vuoto di X.

Esercizio 2. Siano $X = \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Z},\ a < b\}.$$

(1) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia su X.
(2) Determinare parte interna e chiusura dei sottoinsiemi $[0, 1[$ e $]1/2, 5/2[$ rispetto a questa topologia.

Esercizio 3. Consideriamo $X = \mathbb{R}$ con topologia cofinita. Determinare la chiusura di $[0, 1]$ rispetto a questa topologia.

Esercizio 4. In topologia cofinita, ogni sottoinsieme dello spazio topologico è denso: vero o falso?

Esercizio 5. (**da sapere**) Dimostrare che, in uno spazio topologico, un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Esercizio 6. Sia X uno spazio topologico, sia $x \in X$, e sia $U \subseteq X$ un intorno di x.

(1) Dato V un sottoinsieme di X contenente U, dimostrare che anche V è un intorno di x.
(2) Dato U' un altro intorno di x, dimostrare che $U \cup U'$ e $U \cap U'$ sono anch'essi intorni di x.

Esercizio 7. (**da sapere**) Sia X uno spazio topologico, sia $x \in X$ e sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme. Sia inoltre J un sistema fondamentale di intorni di x. Dimostrare che $x \in \overline{D}$ se e solo se $U \cap D \neq \varnothing$ per ogni $U \in J$.

Esercizio 8. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea. Determinare quali dei seguenti sono sistemi fondamentali di intorni del punto $0 \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{J}_1 = \{] - n, n[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\};$$

$$\mathcal{J}_2 = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, \frac{7}{n} \right[\;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\};$$

$$\mathcal{J}_3 = \{]-\varepsilon, \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

Esercizi sulla sezione **Applicazioni continue**:

Esercizio 9. (**da sapere**) Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione fra spazi topologici, e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di X. Dimostrare che f è continua se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Esercizio 10. (**da sapere**) Sia $f \colon X \to Y$ un'applicazione biiettiva fra due spazi topologici.

(1) Dimostrare che f è aperta se e solo se f^{-1} è continua.
(2) Dimostrare che f è un omeomorfismo se e solo se f è continua e aperta.
(3) Dimostrare che f è un omeomorfismo se e solo se f è continua e chiusa.

Esercizio 11. Siano X, Y spazi topologici, e $p \in Y$. Sia $f\colon X \to Y$ l'applicazione costante $f(x) = p$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è continua, qualsiasi siano le topologie su X e su Y.

Esercizio 12. Siano $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}$, entrambi con topologia di Zariski. Sia $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ un polinomio in due variabili, considerato come applicazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dimostrare che f è continua.

Esercizio 13. Sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione fra spazi topologici. Dimostrare che se f è aperta, allora l'immagine $f(X)$ è un aperto di Y, e che se f è chiusa allora l'immagine $f(X)$ è un chiuso di Y. Usare questi fatti per trovare esempi di applicazioni non aperte e non chiuse.

Esercizio 14. Sia $Y = \mathbb{R}$ con topologia cofinita, sia $X = \mathbb{R}^2$ e sia $\pi\colon X \to Y$ la proiezione sulla prima coordinata, cioè $\pi(x, y) = x$. Determinare se f è continua, nei casi seguenti:

(1) se X è totato della topologia cofinita;
(2) se X è dotato della topologia euclidea;
(3) se X è dotato della topologia di Zariski.

Esercizio 15. Sia X un insieme dotato della topologia banale, sia Y uno spazio topologico, e sia $f\colon X \to Y$ un'applicazione. L'applicazione f è continua se e solo se anche Y ha topologia banale: vero o falso?