Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Francesco Meazzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.10

16.5.2024

Esercizi sulle sezioni **Rivestimenti**, **Quozienti per azioni propriamente discontinue**, **Sezioni**

Esercizio 1. Definire un rivestimento $p\colon E \to S^1$ non banale, in modo tale che esista una sezione globale continua $s\colon S^1 \to E$.

Esercizio 2. (**da sapere**) Si consideri l'applicazione naturale $p\colon S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ data associando a un punto $x \in S^n$ la sua classe $[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$. Dimostrare che p è un rivestimento, dato da un'azione propriamente discontinua di un gruppo di omeomorfismi $G \subseteq \mathrm{Omeo}(S^n)$.

Esercizio 3. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, con X connesso ed E non vuoto. Dimostrare che p è suriettiva.

Esercizio 4. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Dimostrare che se X è di Hausdorff allora anche E è di Hausdorff.

Esercizio 5. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, con X connesso e di Hausdorff. Dimostrare che

(1) se X è compatto e p ha grado finito allora anche E è compatto;
(2) se E è compatto allora p ha grado finito.

Esercizio 6. Sia $E = \mathbb{R}^2$ e $G \subseteq \mathrm{Omeo}(E)$ il sottogruppo generato dai seguenti omeomorfismi:

$$a\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+1, 1-y) \end{array}, \qquad b\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, y+1) \end{array}.$$

Dimostrare che G agisce in modo propriamente discontinuo su E. A quale spazio topologico noto è omeomorfo il quoziente E/G?

Esercizi sulla sezione **Sollevamento di cammini e di omotopia**:

Esercizio 7. Sia $p\colon E \to X$ rivestimento con E connesso per archi, e sia $Y \subseteq X$ un sottospazio connesso per archi. Fissato $y_0 \in Y$ e data l'inclusione $\iota\colon Y \to X$, supponiamo che $\iota_*\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, y_0)$ sia suriettiva. Dimostrare che $p^{-1}(Y)$ è connesso per archi.