Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Francesco Meazzini

a.a. 2023/2024

Foglio di esercizi n.1

1.3.2024

Esercizi sulla sezione **Introduzione**[1]:

Esercizio 1. Dimostrare che il *disco chiuso*

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è omeomorfo al "quadrato pieno chiuso"

$$Q = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1],\ y \in [0, 1]\big\} = [0, 1] \times [0, 1].$$

Esercizio 2. Dimostrare che $X = [0, 1] \cup]2, 3]$ e $Y = [0, 2]$ non sono omeomorfi, anche se abbiamo visto a lezione che esiste un'applicazione continua e biiettiva $f \colon X \to Y$. (*Suggerimento: dimostrare che una qualsiasi applicazione $g \colon Y \to X$ suriettiva non può essere continua, ad esempio usando risultati noti di analisi.*)

Esercizio 3. Usando la definizione usuale di sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$, dimostrare che un qualsiasi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se il complementare $\mathbb{R}^n \smallsetminus A$ è chiuso. Si usi qui la definizione per cui un sottinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se contiene tutti i punti aderenti a C.

Esercizi sulla sezione **Spazi topologici e basi**:

Esercizio 4. Elencare tutte le topologie possibili su un insieme di cardinalità 2. Definire una topologia non banale e non discreta su un insieme di cardinalià 5.

Esercizio 5. (**da sapere**) Consideriamo le due famiglie seguenti di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{B_\varepsilon(p) \;\middle|\; p \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\right\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{]a, b[\times]c, d[\mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}.$$

Cioè $\mathcal{B}_1$ è la famiglia dei dischi aperti nel piano, con qualsiasi raggio e qualsiasi centro, e $\mathcal{B}_2$ è la famiglia dei "rettangoli aperti", dove per rettangolo intendiamo un rettangolo "pieno", non solo i 4 lati. Dimostrare che sono entrambe basi della topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 6. Poniamo

$$Z = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{>0}\right\},$$

e definiamo la famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$ nel modo seguente: $A \in \mathcal{B}$ se e solo se A è un intervallo aperto, oppure esiste un intervallo aperto $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A = B \smallsetminus Z$. Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$, e trovare un aperto di $\mathcal{T}$ che non è aperto in topologia euclidea.

Esercizio 7. (**da sapere**) Sia X un insieme qualsiasi, e consideriamo la famiglia $\mathcal{T} \subseteq \mathscr{P}(X)$ definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subseteq X$ è in $\mathcal{T}$ se e solo se $A = \varnothing$ oppure $X \smallsetminus A$ è un insieme finito. Dimostrare che $\mathcal{T}$ è una topologia, è detta topologia *cofinita*. Per quali insiemi X la topologia $\mathcal{T}$ coincide con la topologia discreta?

Esercizio 8. Consideriamo la topologia cofinita su $\mathbb{R}$.

[1] Per questi 3 esercizi si usino le definizioni usuali di applicazione continua fra sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, e di sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

(1) Dato $A \subseteq X$ aperto in questa topologia, dimostrare che A è aperto anche in topologia euclidea.
(2) Dati $p, q \in \mathbb{R}$ qualsiasi con $p \neq q$, dimostrare che non esistono due aperti (in topologia cofinita) disgiunti A, B tali che $p \in A$ e $q \in B$.
(3) Dimostrare che invece in topologia euclidea due aperti del genere esistono per qualsiasi scelta di p e q.

Esercizio 9. Sia X un insieme dotato della topologia discreta, e sia $\mathcal{B}$ una base della topologia. Dimostrare che $\{x\} \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 10. Sia K un campo.
(1) Dimostrare che la topologia di Zariski su $K = K^1$ è la topologia cofinita.
(2) Sia $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, e consideriamo la topologia di Zariski su $X = K^n$. Dato un polinomio $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, poniamo
$$V(f) = \{p \in K^n \mid f(p) = 0\}$$
e dato un sottoinsieme $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ poniamo
$$V(S) = \{p \in K^n \mid f(p) = 0 \, \forall f \in S\}.$$
Dimostrare che $C \subseteq K^n$ è chiuso se e solo se esiste un sottoinsieme $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ tale che $C = V(S)$.
(3) Sia $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ un sottoinsieme qualsiasi, e sia $I = (S)$ l'ideale di $K[x_1, \ldots, x_n]$ generato da S. Dimostrare che[2]
$$V(I) = V(S).$$

Esercizio 11. (**da sapere**) Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo
$$\mathcal{B} = \{[a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, \ a < b\}.$$
(1) Dimostrare che $\mathcal{B}$ è base di una topologia su $\mathbb{R}$, detta *topologia di Sorgenfrey*.
(2) Dimostrare che un qualsiasi intervallo aperto $]a, b[$ con $a < b$ (entrambi numeri reali) è aperto anche in topologia di Sorgenfrey.
(3) Dimostrare che la topologia di Sorgenfrey è strettamente più fine della topologia euclidea.
(4) Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, l'intervallo $[a, b[$ è aperto e anche chiuso in topologia di Sorgenfrey.

Esercizio 12. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato, e per ogni $a \in X$ si consideri
$$M_a = \{x \in X \mid a \leq x\}.$$
Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi
$$\{M_a \mid a \in X\}$$
è base di una topologia.

[2]Se sapete cos'è il radicale $\sqrt{I}$ di I, vi esorto a dimostrare anche che $V(I) = V\left(\sqrt{I}\right)$.