Esempio: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoins. connesso, e sia A' l'unione di tutti i segmenti (in $\mathbb{R}^2$) da $a \in A$ a $b \in A$, per ogni $a, b \in A$.

A' è connesso, dimostriamolo: il segmento da a a b è fatto dai punti $a(1-t)+tb$ per $t \in [0,1]$, quindi

$$A' = \{ a(1-t)+tb \mid a, b \in A,\ t \in [0,1] \}.$$

Consid. l'applicaz. continua

$$f: A \times A \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(a, b, t) \longmapsto a(1-t) + tb$$

la sua immagine è A', il dominio è connesso perché A e $[0,1]$ sono connessi. Segue: A' è connesso.

Esempio: In $\mathbb{R}^2$ prendiamo $X = \underbrace{(]-\infty, 0[\times \{0\})}_{A} \cup \underbrace{([0,+\infty[\times \{1\})}_{B}$

Sembrerebbe di poter usare un risultato visto a lezione per dim. che X è connesso, ma X è sconnesso! (A e B sono aperti in X e disgiunti)

Vediamo: usiamo la proiezione $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$, che è aperta.

Poi: $f = p|_X : X \to \mathbb{R}$ è suriettiva, continua, l'immagine è $\mathbb{R}$ che è connesso, le "fibre" $f^{-1}(x)$ sono connesse $\forall x$, infatti:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \{(x,1)\} & \text{se } x \geq 0 \\ \{(x,0)\} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Come mai allora X non è connesso? Perché f non è aperta, anche se p è aperta! Ad es. $f(B) = [0, +\infty[$ non è ap. in $\mathbb{R}$. Quindi: le restrizioni (sul dominio) di appl. aperte non sono sempre aperte.

Esempio: In $\mathbb{R}^n$: $X = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$ è un polinomio completam. riducibile su $\mathbb{R}\}$

Ric.: $p(x)$ compl. riduc. se $p(x) = (c_1 x + d_1) \cdots (c_n x + d_n)$ per coeff. $c_1, d_1, \dots, c_n, d_n$. Qui il pol. $a_0 + a_1 x + \dots + x^n$ è monico, se è compl. riduc. possiamo assumere $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1$ e allora: $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in X \iff \exists d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R} \mid$

$$(x + d_1) \cdots (x + d_n) = \boxed{a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n} \quad (*)$$

Inoltre $a_0, \dots, a_{n-1}$ sono funzioni continue di $d_1, \dots, d_n$ (sono ottenuti da $d_1, \dots, d_n$ con somme e prodotti), cioè

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (d_1, \dots, d_n) \longmapsto (a_0, \dots, a_{n-1})$$

è continua, e

tali che valga $(*)$

$X = f(\mathbb{R}^n)$, quindi X è connesso.