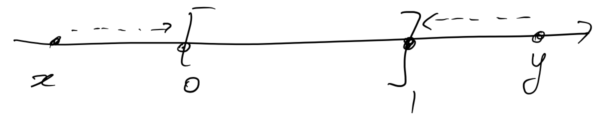
Esempi: 1) $[0,1] = X$, $Y = \{1/2\}$: Y è retratto per def. di X quindi X e Y sono omotopicam. equivalenti (anche se non sono omeomorfi)

$]0,1[= X'$, $Y = \{1/2\}$: analogo. Segue allora che $]0,1[$ e $[0,1]$ sono omotopicam. equivalenti.

2) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,1]$: Y è retratto per def. di X

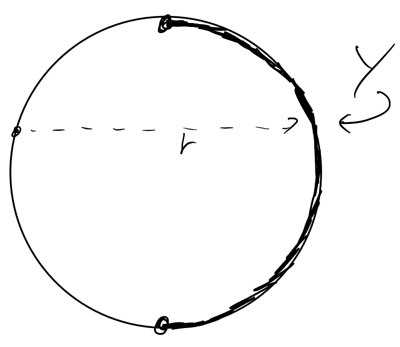
(esercizio: dare esplicitam. una def.)



$X = \mathbb{R}$, $Z =]0,1[$: Z <u>non</u> è retratto di X

(esercizio: dimostrarlo, sugg.: $r(0) = a \in]0,1[$, ma $r(x) = x \;\; \forall x \in]0,1[$)

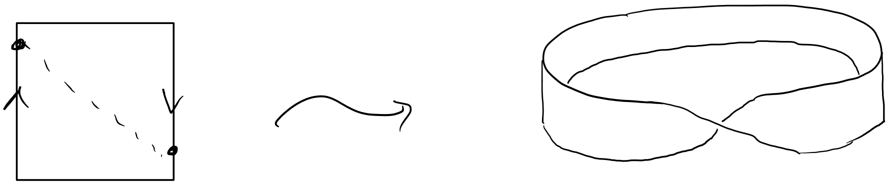
3) $X = S^1$, $Y = \{(a,b) \in S^1 \mid a \geq 0\}$



Y è retratto usando ad es. $r(a,b) = (|a|, b)$

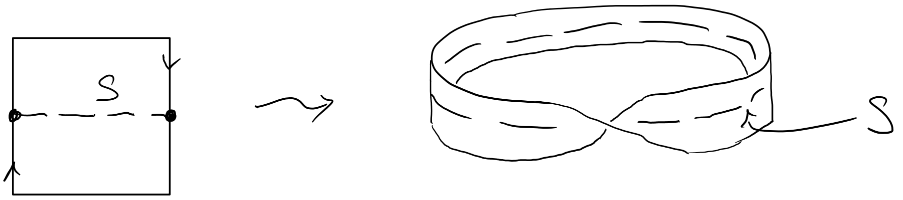
ma Y non è retratto per def. di X (per dim. si userà π_1)

4) Sia $\sim$ la relaz. su $X = [0,1] \times [0,1]$ vista negli esercizi tale che $X/_\sim = M$ è il nastro di Möbius:

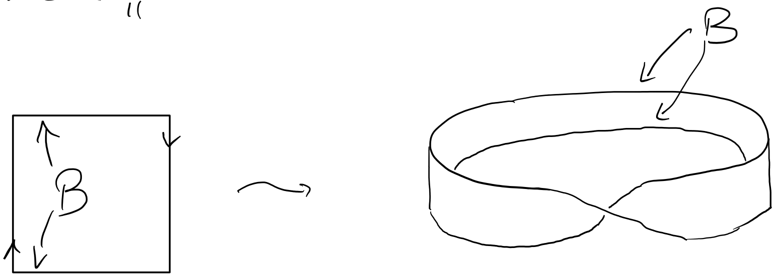


$= M$

In „mezzo" al nastro ho una circonferenza S,



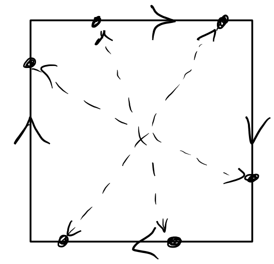
si vede facilmente che S è retratto per def. di M.
Anche il „bordo" di M è omeomorfo a S^1:



ma B <u>non è retratto per def.</u> di M (anche per questo si usa π_1).

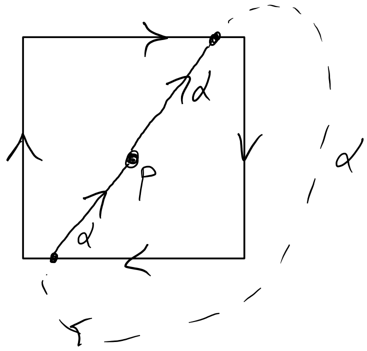
5) Sia $\sim$ la relaz. che identifica i lati di X in modo „antipodale"

$P = X/_\sim$ è una superficie molto difficile da immaginare.

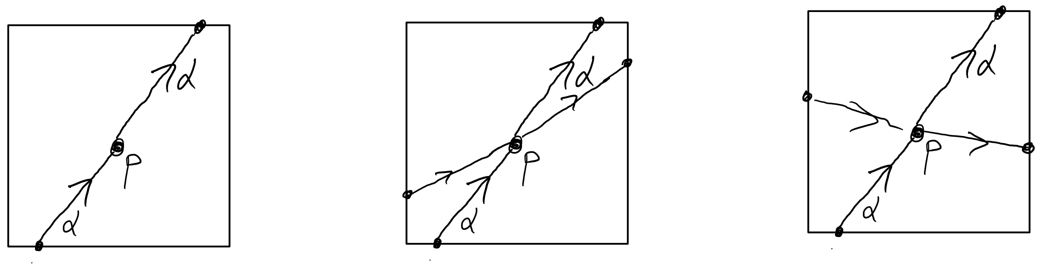


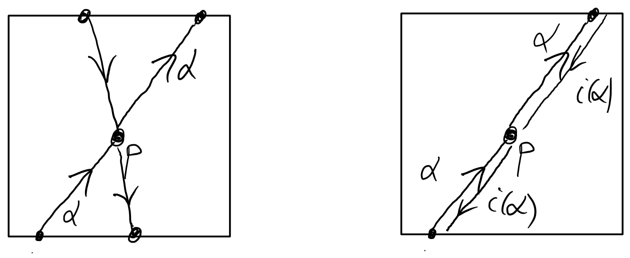
Contiene un cammino chiuso

α tale che $\alpha \not\sim 1_p$ ma $\alpha * \alpha \sim 1_p$:



Omotopia fra $\alpha * \alpha$ e $\alpha * i(\alpha)$:





(Cioè deformo progressivamente il <u>secondo</u> α in $\alpha * \alpha$ facendolo „girare" fino a trasformarlo in $i(\alpha)$)

Cioè α percorso una volta non si può „contrarre" fino ad ottenere il cammino costante, invece α percorso <u>due volte</u> sì!