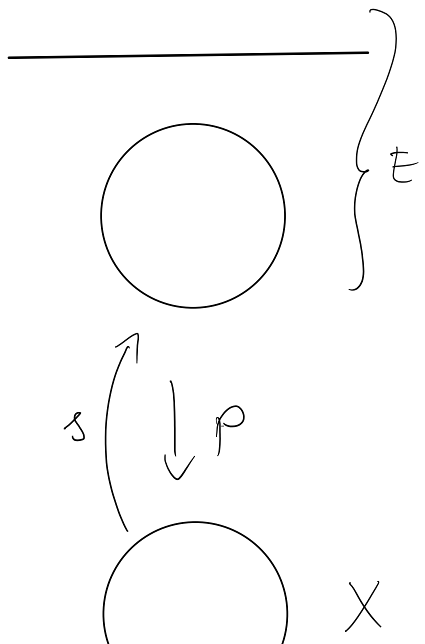
Es. 1: L'idea è quella di usare un rivestimento <u>sconnesso</u>.

Sia ad es. $p: E \to X = S^1$ con $E = \mathbb{R} \cup S^1$ ← unione disgiunta

e $p|_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to S^1$ il solito rivestimento,

$p|_{S^1}: S^1 \to S^1$ l'identità su S^1



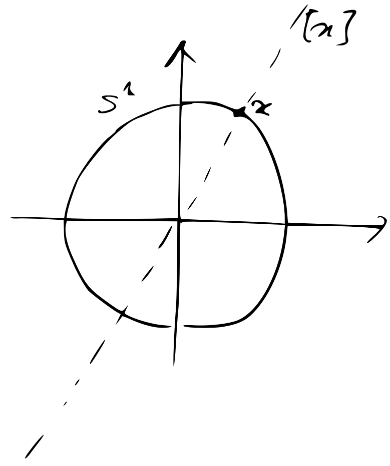
p ha una sezione continua che è

$$s = (p|_{S^1})^{-1} : S^1 \to S^1$$

ma p non è banale: se lo fosse avrei che E è unione disgiunta di aperti, ciascuno omeomorfo a S^1: assurdo.

Es. 2: Consideriamo

$$p: S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$$
$$x \mapsto [x]$$



Dato $[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, abb. $p^{-1}([x]) = \{x, -x\}$

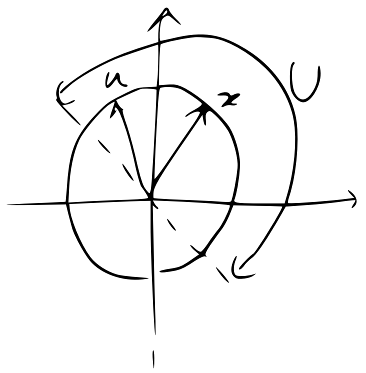
Allora è facile dimostrare che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è omeomorfo a $S^n/\sim$ dove $\sim$ identifica x e $-x$ $\forall x \in S^n$. (Che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ sia in biiezione naturale con $S^n/\sim$ è ovvio, dim per esercizio che è un omeomorfismo).

Inoltre la relaz. $\sim$ si può vedere come indotta da $G \subseteq \text{Omeo}(S^n)$ dove $G = \{Id_{S^n}, \sigma\}$, quindi $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = S^n / G$.

antipodo, $\sigma(x) = -x$

Inoltre G agisce in modo propriam. discontinuo, perché dato $x \in S^n$ e $g \in G$, possiamo definire $U = \{u \in S^n \mid u \cdot x > 0\}$

prod. scalare standard



Se $g \neq Id_{S^n}$ allora $g = \sigma$ e $\sigma(U) = -U$, e vale $\sigma(U) \cap U = \emptyset$.

Deduciamo: p è un rivestimento, di grado 2.

Descriviamo anche aperti banalizzanti e sezioni locali. Dato $[x] \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$, definiamo $V = p(U)$, allora V è un aperto banalizzante e

$$p^{-1}(V) = U \cup (-U), \quad e \quad p|_U : U \to V, \quad p|_{-U} : -U \to V$$

sono omeomorfismi, con inverse

$$(p|_U)^{-1} : V \to U$$
$$[u] \mapsto u \quad \text{con } u \in U$$

$$(p|_{-U})^{-1} : V \to -U$$
$$[u] \mapsto -u \quad \text{con } u \in U$$

(si verifica facilmente che sono ben definite e continue).

Es. 3: Se X è connesso allora $|p^{-1}(x)| = |p^{-1}(y)|$ $\forall y \in X$.

Visto che E è non vuoto, scegliamo $e \in E$, poniamo $x = p(e)$, allora $|p^{-1}(x)| \geq 1 > 0$, da cui $|p^{-1}(y)| > 0$ $\forall y \in X$, cioè nessun punto di X ha controimm. vuota: allora p è suriettiva.

Es. 4: Siano $e \neq e' \in E$. Se $p(e) \neq p(e')$ allora scegliamo aperti $V, V' \subseteq X$ t.c. $V \cap V' = \emptyset$ e $V \ni p(e)$, $V' \ni p(e')$, esistono perché X è T2. Allora $p^{-1}(V) \ni e$, $p^{-1}(V') \ni e'$, e sono aperti disgiunti di E.

Se invece $p(e) = p(e')$ sia $V \subseteq X$ ap. banalizzante, con

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$$

come nella def. di rivestimento.

Sia $i_1 \in I$ t.c. $U_{i_1} \ni e$, $i_2 \in I$ t.c. $U_{i_2} \ni e'$, allora $i_1 \neq i_2$ perché $e \in U_{i_1}$ è l'unico punto di U_{i_1} che viene mandato in $p(e)$ da p. Allora $U_{i_1} \cap U_{i_2} = \emptyset$, e concludiamo che E è di Hausdorff.

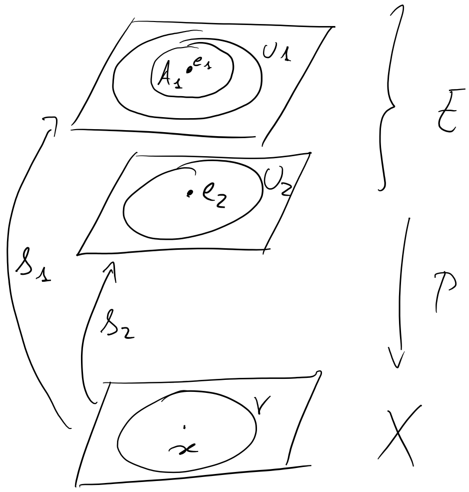
Es. 5: 1) Sappiamo che il codominio e le fibre di p sono compatte, dimostriamo che p è chiusa.

Sia $C \subseteq E$ un chiuso, sia $x \in \overline{p(C)}$, sia $V \subseteq X$ un aperto banalizzante contenente x, e

$$p^{-1}(V) = U_1 \cup \ldots \cup U_d$$

come nella def. di rivestimento (d = grado di p).

Sia $p^{-1}(x) = \{e_1, \dots, e_d\}$,



Siano $s_i: V \to U_i$ le sezioni continue locali di p.

dim. che $e_i \in C$ per qualche i.

Supp. per assurdo $e_i \notin C$ $\forall i \in \{1, \dots, d\}$, e sia A_i intorno aperto di e_i con $C \cap A_i = \emptyset$ (esiste perché $e_i \in E \setminus C$ = aperto) e $A_i \subseteq U_i$. Allora $A = A_1 \cap \dots \cap A_d$ è aperto in E, e $p(A)$ è intorno aperto di x in X. Deve contenere punti di $p(C)$, cioè $p^{-1}(A)$ deve intersecare C. Ma

$$p^{-1}(A) = s_1(A) \cup \dots \cup s_d(A)$$

e $s_i(A) \subseteq A_i$ non interseca C: assurdo.

Allora p è chiusa, e segue E compatto.

2) Se X è di Hausdorff allora $\{x\}$ è chiuso in X $\forall x \in X$. Allora $p^{-1}(x)$ è discreto e chiuso in un compatto E, quindi $p^{-1}(x)$ è compatto e discreto, allora è un ins. finito.

Es. 6: Osserviamo che se $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ allora $a(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ e $b(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, e lo stesso con a^{-1} e b^{-1}.

Ogni elem. di G si scrive come prodotto di a, b, a^{-1}, b^{-1}, quindi per ogni $g \in G$ vale $g(u,v) \in \mathbb{Z}^2$. In modo simile si dimostra che se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ allora $g(x,y) = (x,y) + (\text{un elem. di } \mathbb{Z}^2)$.

Osserviamo inoltre che G non è abeliano, infatti

aba^{-1} è l'applicaz. $(x,y) \underset{a^{-1}}{\longmapsto} (x-1, 1-y) \underset{b}{\longmapsto} (x-1, 2-y)$

$\underset{a}{\longmapsto} (x, 1-(2-y)) = (x, y-1)$

cioè $aba^{-1} = b^{-1}$. Da questo segue facilmente

$ab^{-1}a^{-1} = b$, e anche $ab^{\pm 1} = b^{\mp 1} a$,

e $a^{-1} b^{\pm 1} a = b^{\mp 1}$.

Ora: gli elem di G si ottengono come prodotti di a, b, a^{-1}, b^{-1} ripetuti in qualsiasi ordine.

Dalle formule $ab^{\pm 1} = b^{\mp 1} a$, $a^{-1} b^{\pm 1} = b^{\mp 1} a$

deduciamo che in un prodotto di elem. a, a^{-1}, b, b^{-1} ripetuti, possiamo scambiare a e b vicini a patto di cambiare l'esponente di b. Allora possiamo mettere tutte le a all'inizio e tutte le b alla fine, cioè possiamo scrivere ogni $g \in G$ come $g = a^n b^m$ per qualche $n, m \in \mathbb{Z}$.

Supponiamo ora $g \in G$ abbia un punto fisso:

$g(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$.

Scriviamo $g = a^n b^m$, e osserviamo che b non cambia l'ascissa mentre a la incrementa di 1. Da

$g(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$ segue allora $n=0$, cioè $g = b^m$.

Ora b incrementa l'ordinata di 1, da cui segue $m=0$, cioè $g = id_{\mathbb{R}^2}$. Cioè nessun elem. non banale di G ha punti fissi.

Da tutto questo segue: per ogni $g \in G$ e ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$\| g(x,y) - (x,y) \| \begin{cases} = 0, & \text{opp.} \\ \geq 1 & = \text{norma minima di un elem. non nullo di } \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

e il primo caso $(=0)$ si verifica solo se $g = id_{\mathbb{R}^2}$.

Scegliamo allora $U = B_{1/2}(x,y)$: vale

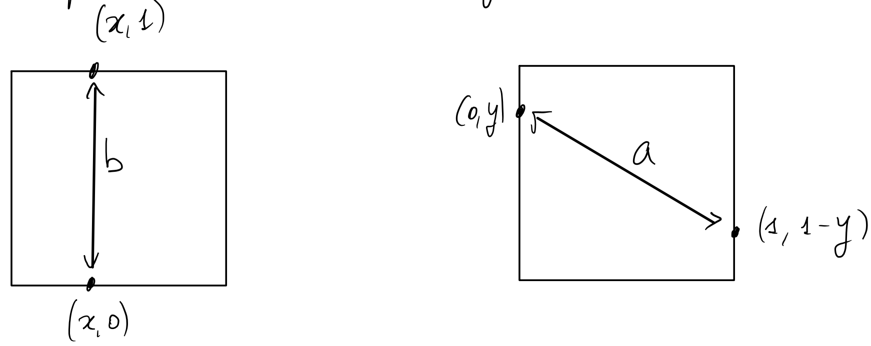
$g(U) \cap U \neq \emptyset \implies$ per la dis. triangolare ogni $p \in U \cap g(U)$ soddisfa $d(p, g(p)) < 1 \implies g = id_{\mathbb{R}^2}$, cioè G agisce in modo propriam. discontinuo.

Consid. $[0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2 = E$: ogni punto dell'interno del quadrato viene identificato solo a se stesso. Poi ogni punto di $\mathbb{R}^2$ è identificato ad almeno un punto del quadrato (basta usare ripetutamente b o b^{-1} per mettere l'ordinata in

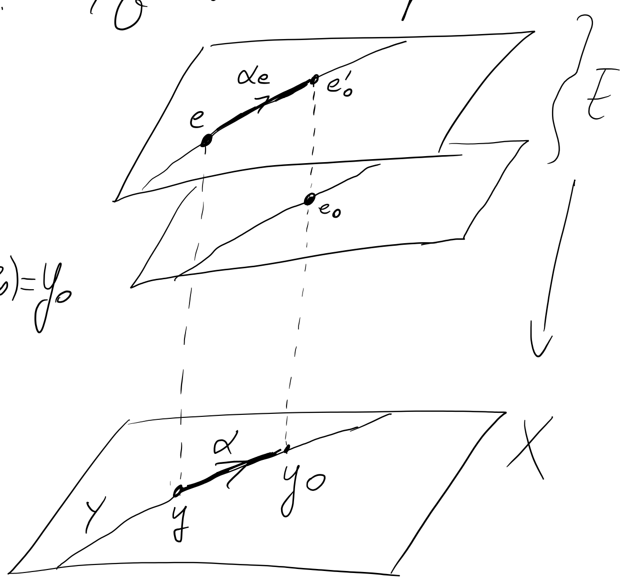
$[0,1]$, poi fare la stessa cosa con a o a' e l'ascissa).

Segue: E/G è omeomorfo a un quoziente del quadrato $[0,1]^2/\sim$, dove $\sim$ identifica alcuni punti sui lati.

Infine i punti sui lati vengono identificati tramite a e b:



cioè i lati del quadrato sono identificati come per la bottiglia di Klein. Segue: E/G è omeomorfo alla bottiglia di Klein.



Es. 7: Siano $e, e_0 \in p^{-1}(Y)$ con $p(e_0) = y_0$

scegliamo un cammino

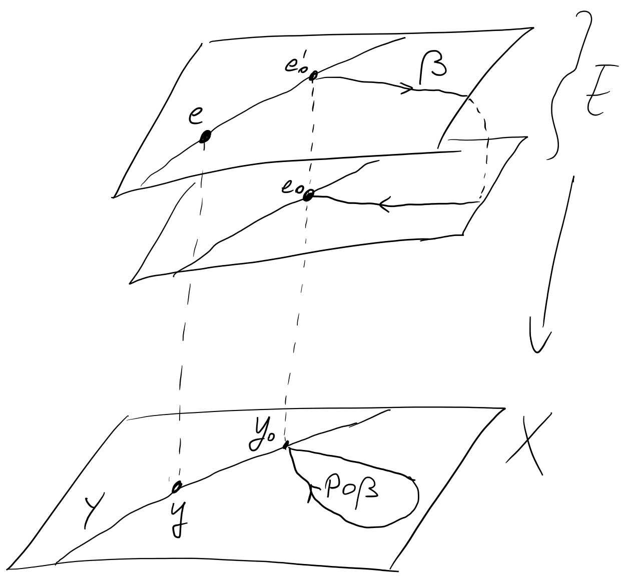
$\alpha \in \Omega(Y, y, y_0)$

dove $y = p(e)$, e

solleviamo α partendo da e. Otteniamo il cammino α_e in E. Il punto finale $\alpha_e(1) = e_0'$ soddisfa $p(e_0') = y_0$ $(= p(e_0))$. Sia ora $\beta \in \Omega(E, e_0, e_0')$:

e consid. $p\circ\beta$, che è un cammino in X da $p(e_0)$ a $p(e_0')$, cioè da y_0 a y_0.

Cioè $p\circ\beta$ è un cammino chiuso, e la sua classe $[p\circ\beta]\in\pi_1(X,y_0)$ è contenuta nell'immagine



$\iota_*(\pi_1(Y,y_0))$, cioè esiste $\gamma\in\Omega(Y,y_0,y_0)$ tale che $[p\circ\beta]=[\gamma]$, cioè $p\circ\beta\sim\gamma$. Solleviamo entrambi i cammini partendo da e_0': il solleram. di $p\circ\beta$ è β stesso, mentre il solleram. di γ si denota con $\gamma_{e_0'}$.

Ora: a lezione abb. visto che se due cammini sono equivalenti in X, i loro sollevati (dallo stesso punto) finiscono nello stesso punto.

Cioè $\gamma_{e_0'}(1)=\beta(1)=e_0$. D'altronde il solleram. $\gamma_{e_0'}$ è tutto contenuto in $p^{-1}(Y)$, visto che γ è cont. in Y.

Vale lo stesso per il solleram. α_e di α. Allora $\forall e\in E$ esiste un cammino $\alpha_e * \gamma_{e_0'}$ che congiunge e con e_0, cammino tutto contenuto in $p^{-1}(Y)$. Segue facilmente che $p^{-1}(Y)$ è connesso per archi.