Es. 1: X e Y sono omotopicamente equivalenti, infatti S^n è un retratto per def. di entrambi tramite l'applicazione $R: X \times [0,1] \longrightarrow X$

$$(p, t) \longmapsto tp + \frac{(1-t)}{\|p\|} p$$

e analogam. per Y. Quindi sia X sia Y sono omotopicam. equivalenti a S^n. Si può vedere anche direttam. usando $f: X \longrightarrow Y$, $p \longmapsto p/\|p\|$ e $g: Y \longrightarrow X$, $p \longmapsto p/\|p\|$

e verificando che $g \circ f$ e $f \circ g$ sono omotope alle rispettive identità (l'omotopia è data proprio da R).
In realtà X e Y sono anche omeomorfe: qual è un omeomorfismo?

Es. 2: Sappiamo che in generale se f e g sono omotope c'è un cammino γ da $f(a)$ a $g(a)$ tale che $g_* = \gamma_\# \circ f_*$. Se $f(a) = g(a)$ allora γ è un cammino chiuso, e abb.:

$$g_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$$
$$f_*: \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$$
$$\gamma_\#: \pi_1(Y, f(a)) \longrightarrow \pi_1(Y, f(a))$$
$$[\alpha] \longmapsto [i(\gamma) * \alpha * \gamma] =$$
$$= [i(\gamma)] \cdot [\alpha] \cdot [\gamma] = [\gamma]^{-1} \cdot [\alpha] \cdot [\gamma]$$

cioè $\gamma_\#$ è il coniugio per l'elem. $i(\gamma)$ nel gruppo $\pi_1(Y, f(a))$. Da $g_* = \gamma_\# \circ f_*$ segue che le immagini di f_* e g_* sono sottogruppi coniugati, perché $\mathrm{Im}(g_*) = [\gamma]^{-1} \cdot (\mathrm{Im}(f_*)) \cdot [\gamma]$.

Es. 3: 1) Consid. il quoziente solito $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Allora A_i è l'immagine dell'aperto saturo

$$\tilde{A}_i = \{ (x_0, .., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0 \}$$

quindi A_i è aperto in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Un omeom. è dato da $\varphi : [x_0, ..., x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, .., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, .., \frac{x_n}{x_i} \right)$.

Verifichiamo che è ben definita e un omeomorfismo.

Def.

$$\tilde{\varphi} : \tilde{A}_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$(x_0, .., x_n) \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, .., \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, .., \frac{x_n}{x_i} \right)$$

Osserviamo che A_i è il quoziente di $\tilde{A}_i$ per la stessa relaz. di equivalenza solita su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, si verifica subito che $\tilde{\varphi}$ passa al quoziente $\tilde{A}_i \to A_i$ e induce proprio φ.

$$\begin{tikzcd} \tilde{A}_i \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & \mathbb{R}^n \\ A_i \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Quindi φ è ben def. e continua.

L'inversa di φ è $(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \longmapsto [x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n]$

che è ovviamente continua, essendo la composizione di π con l'appl.

$$(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \longmapsto (x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$$

che è continua.

(2) Visto che A_i è aperto, $H_i = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \setminus A_i$ è chiuso.

Un omeom. con $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}}$ è dato da

$$[x_0,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n] \longmapsto [x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n]$$

Il fatto che sia ben def. e continua si dimostra come nel punto precedente, facendo passare al quoziente l'applicaz.

$$(x_0,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n) \longmapsto [x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n]$$

L'inversa è $[x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n] \longmapsto [x_0,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n]$

anch'essa è ben def e continua col metodo di prima.

(3) Sappiamo che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è T2, quindi $\{[0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{coord. } x_i}}{1},0,\dots,0]\}$ è chiuso, e B_i è aperto.

Osserviamo che $[0,\dots,0,1,0,\dots,0]$ è in A_i, da cui $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} = A_i \cup B_i$.

(4) $A_i \cap B_i = A_i \setminus \underbrace{[0,\dots,0,1,0,\dots,0]}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{punto}\}$, anzi il punto che corrisponde a $\uparrow$ è proprio $0 \in \mathbb{R}^n$ tramite l'omeom. di prima $A_i \to \mathbb{R}^n$.

(5) Una deformazione è data da

$$B_i \times [0,1] \longrightarrow B_i$$

$$([x_0, \dots, x_n], t) \longmapsto [x_0, \dots, x_{i-1}, t x_i, x_{i+1}, \dots, x_n]$$

(6) Lo svolgimento con $\mathbb{C}$ al posto di $\mathbb{R}$ è identico.

(7) Per induzione su n: $\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}} = \{\text{punto}\}$ è semplicem. connesso.

<u>Passo induttivo $n-1 \rightsquigarrow n$ $(n \geq 1)$</u> A_i per $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è omeomorfo a $\mathbb{C}^n$ quindi è semplicemente connesso. Invece B_i ha H_i come retratto per def., e H_i è omeomorfo a $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}$ quindi H_i è semplicem. connesso per ipotesi induttiva.

Infine $A_i \cap B_i$ è omeomorfo a $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ che è connesso per archi e non vuoto (ric. $n \geq 1$).

Conclusione: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è semplicemente connesso $\forall n \geq 0$.

(8) Fallisce il passo induttivo $0 \rightsquigarrow 1$ perché in questo caso $A_i \cap B_i$ è omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ che è non vuoto ma <u>non</u> connesso per archi.

<u>Es. 4</u>: Per induzione su $m = |Y|$. Se $m=0$ allora $\mathbb{R}^n \setminus Y = \mathbb{R}^n$ che è sempl. connesso.

<u>Passo induttivo</u> $m-1 \rightsquigarrow m$ $(m \geq 1)$:

Sia $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ e $Y' = \{y_1, \dots, y_{m-1}\}$.

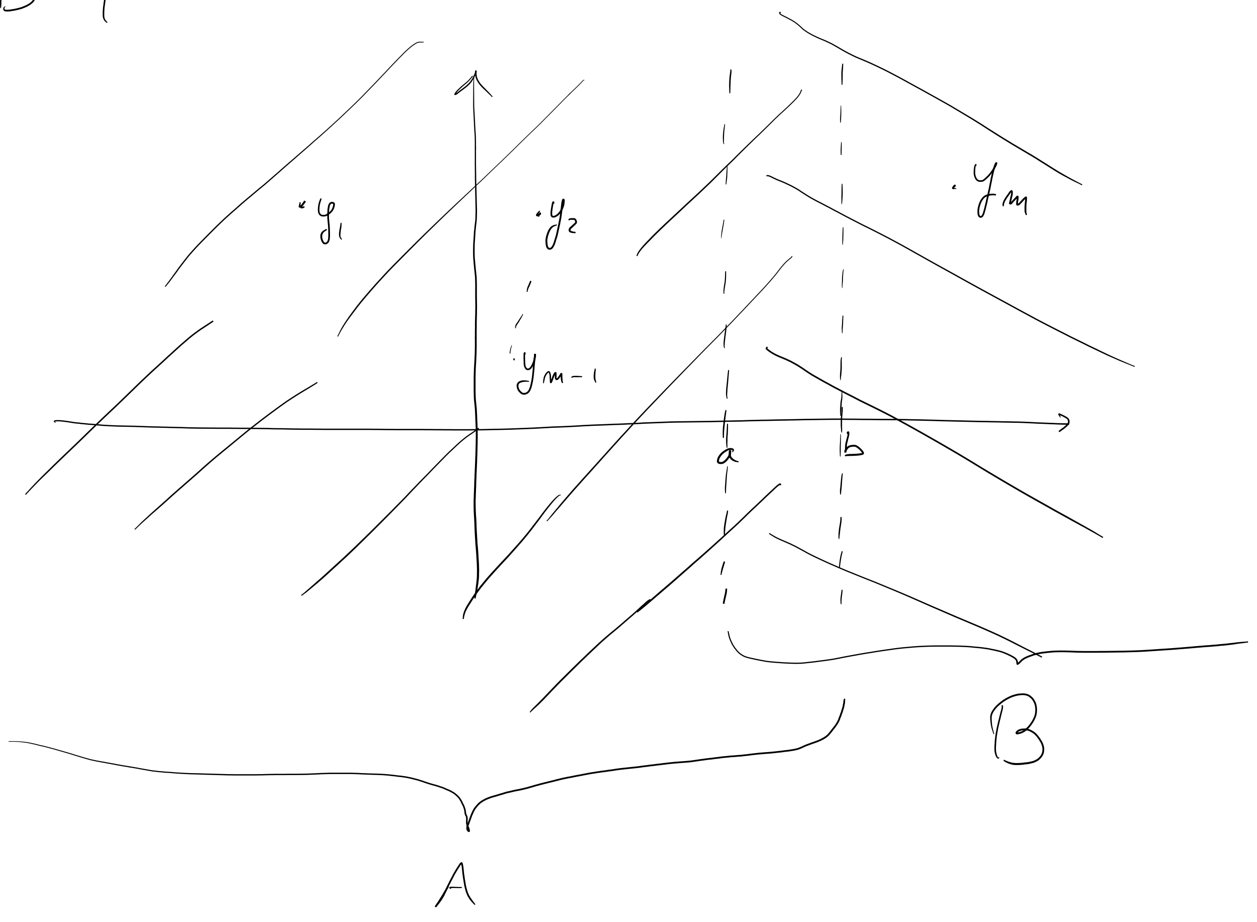
Possiamo supporre che l'ultima coordinata di y_m sia strettam. più grande delle ultime coordinate di $y_1, \dots, y_{m-1}$ (a meno di cambiare l'ordine di $y_1, \dots, y_m$ e ruotare l'insieme Y, in modo che ci sia un punto con l'ultima coordinata più grande dell'ultima coordinata di tutti gli altri).

Siano $a < b \in \mathbb{R}$ tali che che l'ultima coord. di y_m è $> b$, e l'ultima coordinata di $y_1, \dots, y_{m-1}$ è sempre $< a$.

Decomponiamo $X = \mathbb{R}^n \setminus Y$ in:

$$A = \{ (x_1, \dots, x_n) \in X \mid x_n < b \}$$

$$B = \{ \quad \text{———} \quad \mid x_n > a \}$$



Allora $A \cup B = X$, $A \cap B = \mathbb{R}^{n-1} \times [a,b]$ è non vuoto e connesso per archi; A è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus Y'$ (basta "riallungare" la striscia aperta fra a e b fino a riottenere tutto il semispazio alla destra di a) e analogam. B è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{\text{un punto}\}$.

Per induzione A è semplicemente connesso.

A lezione abb. visto che B ha S^{n-1} come retratto per deformazione; visto che $n \geq 3$ abb. S^{n-1} è semplicem. connesso, quindi B è sempl. connesso. Dal teo. di Seifert-Van Kampen segue che X è sempl. connesso.

Es. 5: Sia X l'insieme dell'esercizio, e poniamo

$$A = X \cap B_1(0)$$

$$B = X \setminus \overline{B_{1/2}(0)}.$$

Visto che $B_1(0)$ e $\mathbb{R}^3 \setminus \left(\overline{B_{1/2}(0)}\right)$ ricoprono $\mathbb{R}^3$ e sono aperti, i sottoins. A e B sono ap. in X e $X = A \cup B$.

Osserviamo: $$X = \underbrace{(\mathbb{R}^2 \times \{0\})}_{= C_1} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R})}_{= C_2} \cup \underbrace{(\{0\} \times \mathbb{R}^2)}_{= C_3} \cup S^2.$$

Allora $A = \underbrace{C}_{= C_1 \cup C_2 \cup C_3} \cap B_1(0)$ ed è stellato in $0 \in \mathbb{R}^3$, quindi A è contraibile e semplicem. connesso.

Invece per ogni punto $b \in B$ anche il segmento da b al normalizzato $b/\|b\|$ è tutto contenuto in B, quindi B ha come retratto per def. S^2, tramite

$$R: B \times [0,1] \longrightarrow B$$
$$(b, t) \longmapsto tb + (1-t)\frac{b}{\|b\|}$$

Visto che S^2 è semplicem. connesso, segue che anche B è sempl. connesso.

Per applicare il teo. di Seifert-Van Kampen rimane da verificare che $A \cap B$ è connesso per archi. Siano allora $p, q \in A \cap B$. Sia $D = \{ a \in \mathbb{R}^3 \mid 1/2 < \|a\| < 1 \}$, allora $A \cap B = (C_1 \cap D) \cup (C_2 \cap D) \cup (C_3 \cap D)$.

Inoltre $C_i \cap D$ è omeomorfo alla corona circolare dei punti di $\mathbb{R}^2$ di norma in $]1/2, 1[$, quindi $C_i \cap D$ è conn. per archi. Infine $C_1 \cap D$ interseca $C_2 \cap D$ quindi l'unione è connessa per archi, e $(C_1 \cap D) \cup (C_2 \cap D)$ interseca $(C_3 \cap D)$, quindi l'unione (che è $A \cap B$) è connessa per archi.

Es. 6: $p|_{[a,b]} : [a,b] \longrightarrow p([a,b])$ è biiettiva e continua da un compatto in un T2, quindi è un omeomorfismo e manda $I =]a,b[$ in $p(I)$, quindi

$$p|_I : I \longrightarrow p(I)$$

è un omeomorfismo.