Es. 1: Oss.: se $g \circ f$ è iniettiva, allora f è iniettiva,
se $g \circ f$ è suriettiva, allora g è suriettiva.

Siano $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ con $g \circ f$ e $h \circ g$ biiettive. Allora g è suriettiva perché $g \circ f$ lo è, e g è iniettiva perché $h \circ g$ lo è. Quindi g è biiettiva, allora $f = \underbrace{g^{-1}}_{\text{esiste}} \circ (g \circ f)$ è composizione di biiezioni quindi è biiettiva, e anche $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$.

L'esercizio è concluso nel caso A, B, C, D gruppi, perché omomorfismi biiettivi sono isomorfismi.

Siano allora A, B, C, D spazi topologici. Abb. visto che f, g, h sono biiezioni continue, rimane da dim. che sono aperte. Sia $U \subseteq A$ aperto, allora $(g \circ f)(U) \subseteq C$ è aperto perché $g \circ f$ è omeomorfismo. Inoltre g è biiettiva quindi

$$g^{-1}((g \circ f)(U)) = g^{-1}(g(f(U))) = f(U).$$

g è continua e $(g \circ f)(U)$ è aperto, quindi $f(U)$ è aperto e f è aperta. Sia ora $V \subseteq B$, abb.

$$g(V) = h^{-1}(h(g(V))) = h^{-1}(\underbrace{(h \circ g)(V)}_{\text{aperto in } D \text{ perché } h \circ g \text{ è omeom.}}) \text{ è ap. in } C$$

quindi g è aperta. Infine sia $W \subseteq C$, abb.

$h(W) = (h \circ g)(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\text{ap. in } B})$ è aperto in D quindi h è aperta. Segue: f, g, h omeomorfismi.

<u>Es. 2:</u> Per assurdo se $\mathbb{Z}$ fosse un retratto di $\mathbb{R}$ esisterebbe una retrazione $r : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$. Visto che $r(n) = n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ abb. r suriettiva e continua, ma $\mathbb{R}$ è connesso e $\mathbb{Z}$ no: <u>assurdo</u>.

<u>Es. 3:</u> Sia X T2 e $r : X \longrightarrow Y$ retrazione.

Ingrandiamo il codominio di r ottenendo $\tilde{r} : X \longrightarrow X$, $x \longmapsto r(x)$.

Consid. $Z = \{ x \in X \mid \tilde{r}(x) = x \}$. Visto che X è T2, e Z è il luogo dove le applic. continue $\tilde{r}$ e id_X coincidono, sappiamo che Z è chiuso. D'altronde $\tilde{r}(x) \in Y$ $\forall x \in X$, da cui $Z \subseteq Y$, inoltre $\tilde{r}(y) = y$ $\forall y \in Y$ da cui $Z \supseteq Y$. Cioè $Y = Z$, e allora Y è chiuso.

<u>Es. 4:</u> (1) Y è retratto per deformaz. di X, tramite

$$R : X \times [0,1] \longrightarrow X$$
$$(x, t) \longmapsto tx$$

(2) Z non è retratto di X, quindi non è neppure retratto per def., perché Z non è chiuso in X (v. es. 3)).

(3) W è retratto per def. di X, tramite:

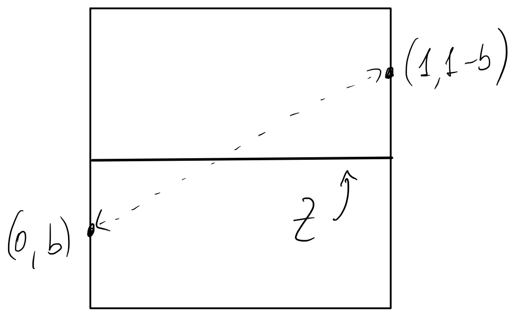
$$R: X \times [0,1] \longrightarrow X$$

$$(x, t) \longmapsto \begin{cases} tx & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \in [0,1] \\ (1-t) + tx & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

<u>Es. 5</u>: Costruiamo il nastro di Möbius nel modo già visto:

$$M = \left([0,1] \times [0,1]\right) \big/ \sim$$

dove $(a,b) \sim (c,d) \iff$
$(a,b) = (c,d)$ opp. $\begin{cases} \{a,c\} = \{0,1\} \text{ e} \\ b = 1-d \end{cases}$



Sia $\pi: [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$ il quoziente.

Consid. $N = \pi(Z)$ dove $Z = [0,1] \times \{1/2\}$.
Osserviamo che $\pi|_Z : Z \longrightarrow N$ identifica in Z (omeom. a $[0,1]$) gli estremi $(0, 1/2)$ e $(1, 1/2)$. E' facile dimostrare con le solite tecniche che N è omeomorfo a S^1.
Definiamo una deformazione $R: M \times [0,1] \longrightarrow M$ per mostrare che N è un retratto per deformazione di M. Definiamo R ponendo

$$\tilde{R} : \left([0,1]\times[0,1]\right) \times [0,1] \longrightarrow M$$
$$((a,b),\ t) \longmapsto [(a,\ tb + (1-t)\cdot \tfrac{1}{2})]$$

Osserviamo che $M \times [0,1]$ è il quoziente di $([0,1]\times[0,1])\times[0,1]$ per la relaz. di equivalenza che identifica $((a,b),t)$ con $((a',b'),t')$ se e solo se $t=t'$ e $(a,b)\sim(a',b')$ (verifica: esercizio).

Inoltre $\tilde{R}$ passa al quoziente, perché

$$\tilde{R}((0,b),t) = [(0,\ tb+(1-t)\cdot\tfrac{1}{2})] = [(0,\ tb - t/2 + \tfrac{1}{2}] = (*)$$

$$\tilde{R}((1,1-b),t) = [(1,\ t(1-b)+(1-t)\cdot\tfrac{1}{2})] = [(1,\ t - tb + \tfrac{1}{2} - t/2)] =$$
$$= [(1,\ \tfrac{1}{2} - tb + t/2)] = (**)$$

e $\quad 1 - (tb - t/2 + \tfrac{1}{2}) = 1 - tb + t/2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} - tb + t/2$

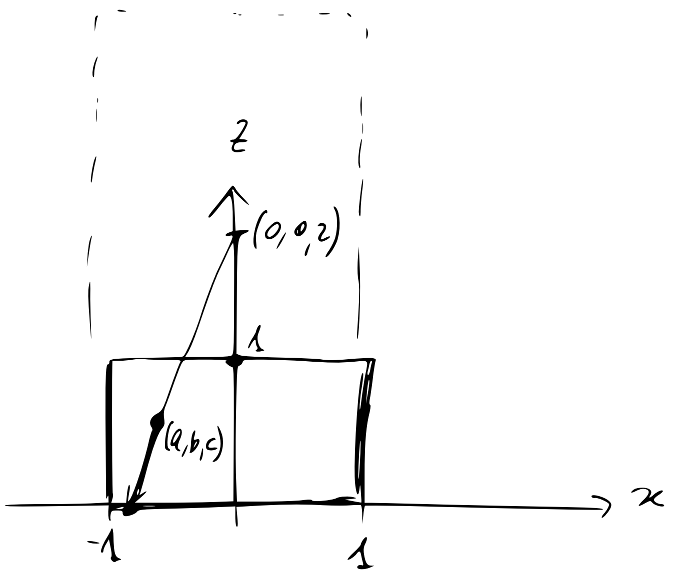
cioè $(*) = (**)$, dunque $\tilde{R}$ passa al quoziente:

$$R : M \times [0,1] \longrightarrow M$$
$$([(a,b)],\ t) \longmapsto [(a,\ tb+(1-t)\tfrac{1}{2})]$$

che è una deformazione di M su N.

Es. 6:

In sezione:



Poniamo $(x,y,z) = (a,b,c) - (0,0,2)$

Definiamo la norma $N(x,y,z) = \max\left\{\sqrt{x^2+y^2}, \left|\frac{z}{2}\right|\right\}$

Il luogo dove $N(x,y,z) = t$ fissato è un cilindro.

La deformazione parte (per $s=1$) da (a,b,c) e finisce (per $s=0$) nel „normalizzato" di (x,y,z) ritraslato di $(0,0,2)$, cioè $\frac{(x,y,z)}{N(x,y,z)} + (0,0,2)$. Cioè:

$$R : X \times [0,1] \longrightarrow Y$$

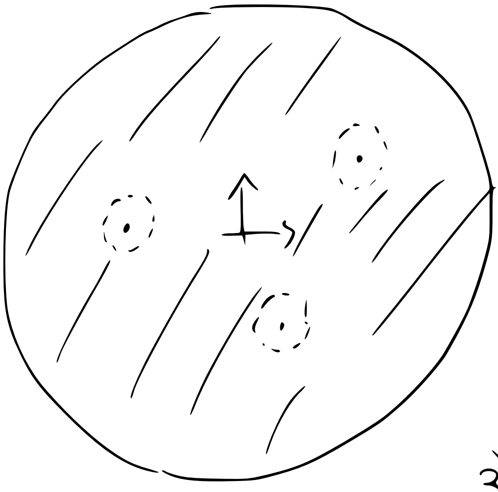
$$((a,b,c), s) \longmapsto (a,b,c)\cdot s + (1-s)\left(\frac{(a,b,c-2)}{\max\left\{\sqrt{a^2+b^2}, \left|\frac{c-2}{2}\right|\right\}} + (0,0,2)\right)$$

E' facile verificare che R è continua e $R((a,b,c), s) = (a,b,c)$ se $(a,b,c) \in Y$.

Es. 7: Definiamo

$$K_m = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \le m, \ \|x - p_i\| \ge \frac{1}{m} \ \forall i \}$$

dove $A = \{p_1, \dots, p_a\}$.



Oss: 1) K_m chiuso e limitato $\forall m$, quindi è compatto.

2) $\mathbb{R}^n \setminus A = \bigcup_{m>0} K_m$

3) $K_m \subseteq K_{m+1}^{\circ}$, quindi $\{K_m^{\circ}\}$ è un ricoprim. aperto di $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Consideriamo compatti H_m definiti analogam. per $\mathbb{R}^n \setminus B$.

Abb.: $\mathbb{R}^n \setminus K_m$ ha $a+1$ componenti connesse, se m è abbastanza grande, e $\mathbb{R}^n \setminus H_m$ ha $b+1$ componenti connesse se m è abbastanza grande.

Supp. per assurdo che esista $\mathbb{R}^n \setminus A \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \setminus B$ f omeomorfismo. Avrei $f(K_m)$ è compatto $\forall m$, ricoprono $\mathbb{R}^n \setminus B$ al variare di m, e anche $f(K_m^{\circ})$.

Su $Y = \mathbb{R}^n \setminus B$ abbiamo le due famiglie con proprietà analoghe: H_m, $f(K_m)$. Allora $\forall m$ esiste N tale che $H_m \subseteq f(K_N)$ (perché H_m è compatto), e esiste M tale che $H_m \subseteq f(K_N) \subseteq H_M$ ed esiste R tale che $H_m \subseteq f(K_N) \subseteq H_M \subseteq f(K_R)$.

Prendiamo i complementari:

$$Y \setminus H_m \supseteq Y \setminus f(K_N) \supseteq Y \setminus H_M \supseteq Y \setminus f(K_R)$$

e consideriamo le inclusioni

$$Y \setminus f(K_R) \longrightarrow Y \setminus H_M \longrightarrow Y \setminus f(K_N) \longrightarrow Y \setminus H_m$$

Consideriamo le applicazioni indotte su π_0:

$$\begin{tikzcd}
\pi_0(Y \setminus f(K_R)) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\text{biiezione}"] & \pi_0(Y \setminus H_M) \arrow[r, "\beta"] \arrow[rr, bend right, "\text{biiezione}"'] & \pi_0(Y \setminus f(K_N)) \arrow[r, "\gamma"] & \pi_0(Y \setminus H_m)
\end{tikzcd}$$

Segue che α, β, γ sono tutte biiezioni (come nell'eserc. 1): è assurdo perché $\pi_0(Y \setminus f(K_R))$ ha $b+1$ elementi e $\pi_0(Y \setminus H_M)$ ha $a+1$ elementi. Quindi f <u>non esiste</u>.

Es. 8: $X = \{ (t, tc) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0,1],\ c \in \mathbb{Q} \}$

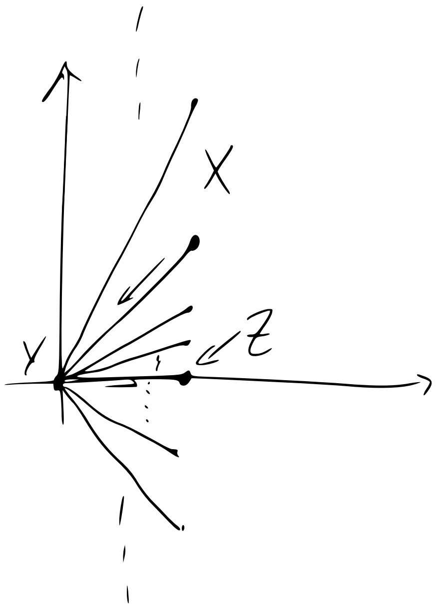


Abb.: $Y = \{(0,0)\}$ è retratto per deformaz. di X, ad es. basta prendere

$$R(x, s) = x \cdot s \qquad (x \in X,\ s \in [0,1])$$

Invece $Z = \{(1,0)\}$ non è retratto per deformazione di X, ma questo non si riesce a dim. facilmente usando il gruppo fondamentale, perché

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(Y) = \text{banale}, \text{ e anche } \pi_1(Z) = \text{banale}.$$

Dimostriamo che Z non è retratto per deformazione, usando i punti $p_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Ovviam. $\lim_{n \to +\infty} p_n = (1,0)$

Supponiamo per assurdo che esista una deformazione $R : X \times [0,1] \to Z$.

Allora $R(p_n, -)$ è un cammino da $(1,0)$ a p_n.

Esiste sicuramente almeno un valore del parametro t_n tale che $R(p_n, t_n) = (0,0)$, infatti se t_n non esistesse allora sarebbe definita

$$[0,1] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Q}$$
$$t \longmapsto \frac{\text{la } y \text{ di } R(p_n, t)}{\text{la } x \text{ di } R(p_n, t)}$$

con $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=\frac{1}{n}$: assurdo. Per cui t_n esiste $\forall n$.

La successione $n \mapsto t_n$ ha una sottosuccessione convergente $t_{n_k} \to t_\infty$, e allora

$$\underbrace{R\Big(\underset{\substack{\downarrow \\ (1,0)}}{p_{n_k}},\ \underset{\substack{\downarrow \\ t_\infty}}{t_{n_k}}\Big)}_{\substack{\parallel \\ (0,0)}} \longrightarrow R((1,0),\ t_\infty) = (1,0)$$

assurdo.

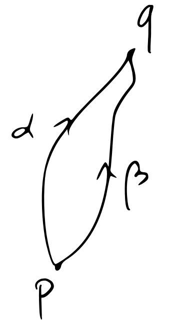
ES. 9: X è connesso per archi, perché dati punti qualsiasi $a, b \in X$ esiste n t.c. $A_n \ni a$ e m t.c. $A_m \ni b$, quindi $A_{\underbrace{\max\{n,m\}}_{\substack{\parallel \\ N}}} \ni a, b$. Visto che A_N è connesso per archi, c'è un cammino da a a b in A_N, quindi anche in X.

Sia $x \in X$ e $\alpha \in \Omega(X, x, x)$. Visto che $\alpha([0,1])$ è compatto, esiste i tale che $A_i \supseteq \alpha([0,1])$. Cioè $\alpha \in \Omega(A_i, x, x)$, e allora $\alpha \sim 1_x$ perché A_i è semplicem. connesso.

Es. 10: Sia X spazio topologico e $\alpha, \beta \in \Omega(X, p, q)$.

Anche senza ipotesi su X, dimostriamo che

$\alpha \sim \beta$ se e solo se $\alpha * i(\beta) \sim 1_x$.



Supponiamo $\alpha \sim \beta$, allora

$\alpha * i(\beta) \sim \beta * i(\beta)$ e

sappiamo già $\beta * i(\beta) \sim 1_p$.

Supponiamo ora $\alpha * i(\beta) \sim 1_p$. Allora

$$\alpha * \underbrace{i(\beta) * \beta}_{\sim 1_q} \sim 1_p * \beta$$

e $\alpha * 1_q \sim \alpha$, $1_p * \beta \sim \beta$. Quindi $\alpha \sim \beta$.

Intuitivamente: