Es. 1: $\mathbb{R}$ con distanza $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$

d induce la topologia discreta, su $\mathbb{R}$ che ha potenza non numerabile, quindi non è 2°-numerabile.

Es. 2: 1) Se X è 1°-num. e $Y \subseteq X$ è un sottospazio, sia $p \in Y$ e $\mathcal{J}$ un sist. fond. di intorni di p in X, con $\mathcal{J}$ numerabile.

Allora $\tilde{\mathcal{J}} = \{ U \cap Y \mid U \in \mathcal{J} \}$ è un sist. fond. di intorni di p in Y, ed è numerabile.

Dati poi P, Q 1°-num. e un punto $(x,y) \in P \times Q$, prendiamo $\mathcal{J}$ sist. fond. di intorni di x in P e $\mathcal{J}'$ di y in Q, con $\mathcal{J}$ e $\mathcal{J}'$ numerabili.

Allora $\{ U \times V \mid U \in \mathcal{J}, V \in \mathcal{J}' \}$ è un sist. fond. di intorni di (x,y) in $P \times Q$, ed è numerabile.

2) Stesse verifiche di 1), ma con

$\mathcal{B}$ base numerabile per $X \rightsquigarrow \{ A \cap Y \mid A \in \mathcal{B} \}$ base numerabile per Y

e $\begin{rmatrix} \mathcal{B} \text{ base numerabile per } P \\ \mathcal{B}' \text{ —— " —— } Q \end{rmatrix}$ $\rightsquigarrow \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{B}'\}$ base numerabile per $P \times Q$.

3) Dati E, F sottoins. densi e numerabili rispett. di P e Q, osserviamo che $E \times F$ interseca ogni aperto non vuoto di $P \times Q$ del tipo solito $U \times V$ dove $U \subseteq P$, $V \subseteq Q$ sono aperti.
Segue: $E \times F$ interseca ogni aperto non vuoto di $P \times Q$, quindi è denso e numerabile.

<u>Es. 3)</u> 1) $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ interseca ogni "rettangolo semiaperto" del tipo $[a, b[\times [c, d[$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$ e $c < d$. Quindi $\mathbb{Q}^2$ è denso in $\mathbb{R}^2$, che allora è separabile anche con questa topologia.

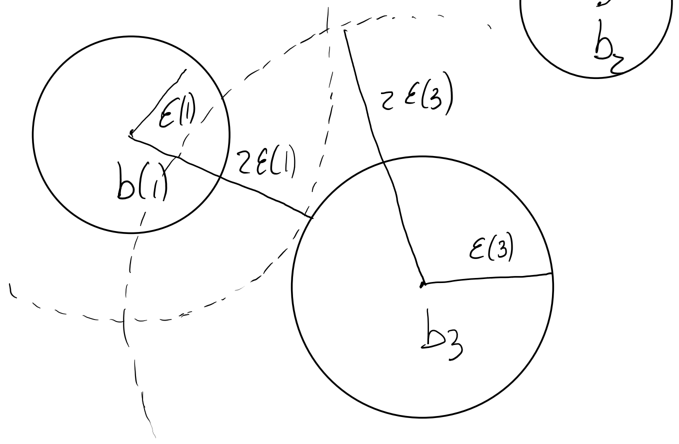
2) La "antidiagonale" $\nabla = \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ ha topologia di sottosp. che è discreta, e ∇ non è numerabile, quindi non è separabile (ogni sottoins. di ∇ è chiuso, quindi l'unico denso è ∇ stessa).

Es. 4: Sia X sp. metrico non compatto, allora non è neppure compatto per successioni. Sia $a: \mathbb{Z}_{\geq 1} \to X$ successione senza sottosucc. convergenti. Allora esiste una sottosucc. iniettiva, cioè possiamo scegliere $s(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che $\forall n$: $s(n+1) > s(n)$ e $a(s(n+1)) \notin \{s(1), \dots, s(n)\}$. Infatti se per assurdo non esistesse una s così, ci sarebbe un $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ tale che $a(m) \in \{a(1), \dots, a(N)\}$ $\forall m \geq N$, allora per infiniti m l'elem. $a(m)$ sarebbe sempre lo stesso, ed esisterebbe una sottosucc. convergente.

(sottosucc., a sua volta senza sottosucc. convergenti)

Poniamo allora $b(n) = a(s(n))$. Per ogni n, esiste $\varepsilon(n) > 0$ t.c. $B_{2\cdot\varepsilon(n)}(b(n))$ non contiene $b(m)$ per alcun $m \neq n$.

Infatti, se per assurdo $\varepsilon(n)$ non esistesse, avrei un $b(m_1) \in B_1(b(n))$, $b(m_2) \in B_{1/2}(b(n))$, $\dots$, $b(m_j) \in B_{\frac{1}{j}}(b(n))$ con $m_1 < m_2 < \dots$ e avrei trovato una sottosucc. convergente a $b(n)$.



Per la disug. triangolare, abbiamo

$$B_{\varepsilon(i)}(b(i)) \cap B_{\varepsilon(j)}(b(j)) = \emptyset$$

$\forall i \neq j$

Definiamo la seguente funzione:

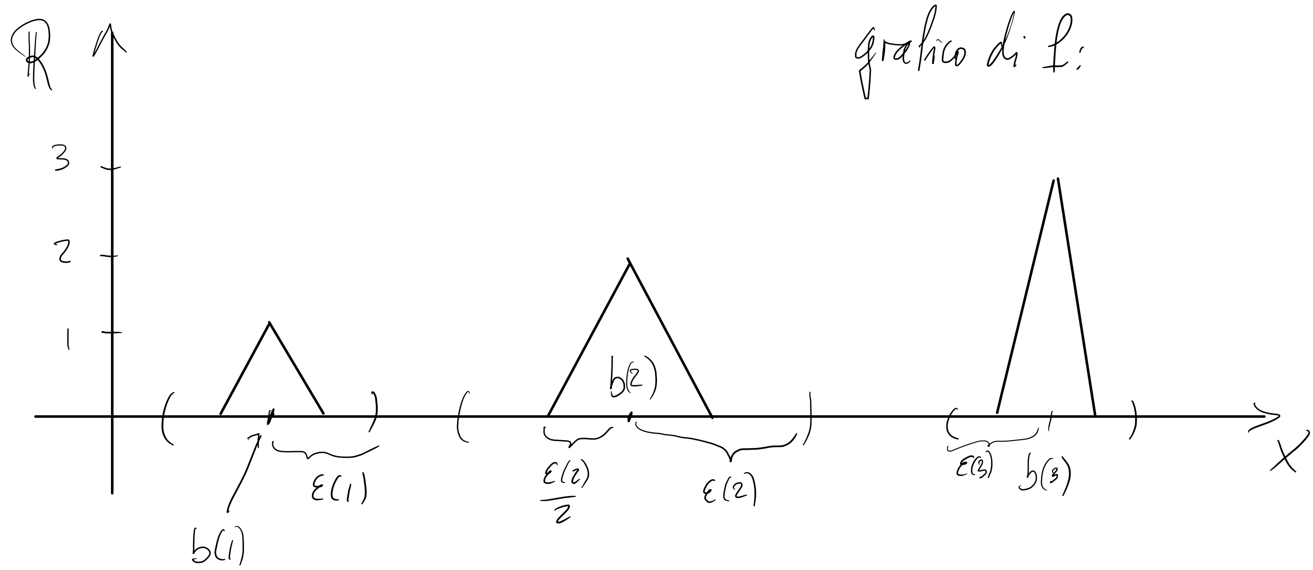
$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$p \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } \forall n: p \notin B_{\varepsilon(n)}(b(n)) \\ 0 & \begin{cases}\text{se } \exists n \mid p \in B_{\varepsilon(n)}(b(n)) \text{ ma} \\ d(p, b(n)) \geq \frac{\varepsilon(n)}{2} \end{cases} \\ n\left(1 - \frac{2\, d(p, b(n))}{\varepsilon(n)}\right) & \begin{cases}\text{se } \exists n \mid p \in B_{\varepsilon(n)}(b(n)) \\ \text{e } d(p, b(n)) < \frac{\varepsilon(n)}{2}\end{cases} \end{cases}$$

un tale n è unico!

Cioè $f(p)$ è $= n$ se $p = b(n)$, scende a 0 per p a distanza $\frac{\varepsilon(n)}{2}$ da $b(n)$, poi è zero sul resto di $B_{\varepsilon(n)}(b(n))$, e fuori da tutte le palle aperte del tipo $B_{\varepsilon(n)}(b(n))$ f è nulla.

grafico di f:

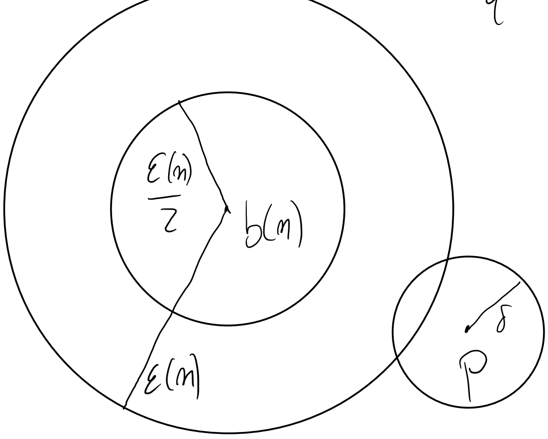


Va dimostrato che f è continua in p $\forall p \in X$. Se $p \in B_{\varepsilon(n)}(b(n))$ per qualche n, f è chiaramente continua in p. Supp. allora $p \notin B_{\varepsilon(n)}(b(n))$

$\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Cerchiamo di capire per quanti n il punto p può essere vicino a $B_{\frac{\varepsilon(n)}{2}}(b(n))$, che è dove f è >0. Consideriamo

$$\delta = \inf \left\{ d(p, b(n)) - \frac{\varepsilon(n)}{2} \;\middle|\; n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}.$$

Ric. $d(p, b(n)) \geq \varepsilon(n)$, quindi $d(p, b(n)) - \frac{\varepsilon(n)}{2} \geq \varepsilon(n) - \frac{\varepsilon(n)}{2} = \frac{\varepsilon(n)}{2} > 0$



Dimostriamo che $\delta > 0$. Sia per assurdo $\delta = 0$, quindi

$$\forall j \ \exists n_j \mid d(p, b(n_j)) - \frac{\varepsilon(n_j)}{2} < \frac{1}{j}.$$

Ma vale anche $\frac{1}{j} > d(p, b(n_j)) - \frac{\varepsilon(n_j)}{2} \geq \varepsilon(n_j) - \frac{\varepsilon(n_j)}{2} = \frac{\varepsilon(n_j)}{2}$

da cui $\varepsilon(n_j) \longrightarrow 0$ per $j \to +\infty$. Segue

$$d(p, b(n_j)) < \frac{1}{j} + \frac{\varepsilon(n_j)}{2} \longrightarrow 0 \quad \text{per } j \to \infty$$

da cui possiamo assumere $j \mapsto n_j$ strettam. crescente, e la sottosucc. $b(n_j)$ è convergente a p: assurdo.

Quindi $\delta > 0$. Se $q \in B_\delta(p)$ allora $q \notin B_{\frac{\varepsilon(n)}{2}}(b(n)) \ \forall n$, perché se per assurdo vale $d(q, b(n)) < \frac{\varepsilon(n)}{2}$ allora

$$d(p, b(n)) \leq d(p, q) + d(q, b(n)) < \delta + \frac{\varepsilon(n)}{2} <$$

$$< d(p, b(n)) - \frac{\varepsilon(n)}{2} + \frac{\varepsilon(n)}{2} = d(p, b(n)) \quad \underline{\text{assurdo}}.$$

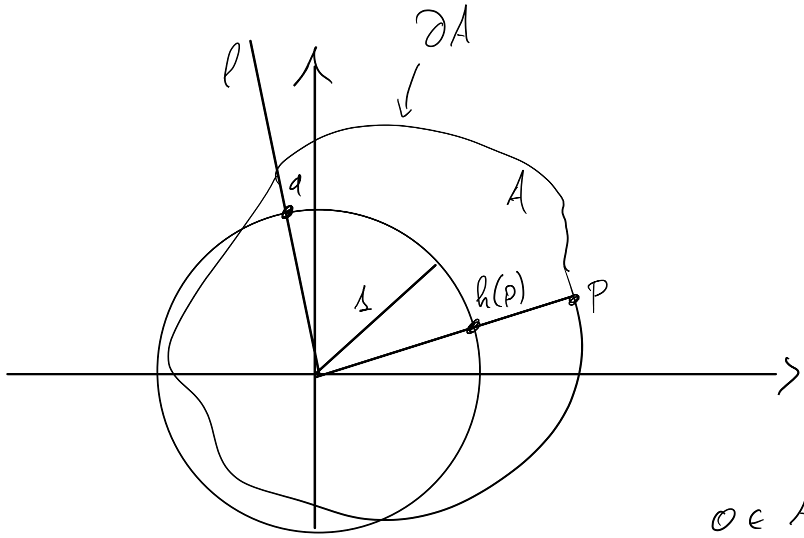
Ma allora $f(q) = 0 \ \forall q \in B_\delta(p)$, quindi f è continua in q.

Segue: f è continua, e illimitata perché $f(b(n)) = n \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

<u>Es. 5</u>: Sia $A' \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, limitato e convesso.

Dato $p \in A'$ consid. $A = A' - p$: è aperto non vuoto, limitato e convesso, contiene l'origine $0 \in \mathbb{R}^n$, ed è omeomorfo ad A'.

Dimostriamo che A è omeomorfo a $B_1(0)$. Consid. ∂A e l'applicaz.



$$h: \partial A \longrightarrow \partial B_1(0) = S^{n-1}$$
$$p \longmapsto p/\|p\|$$

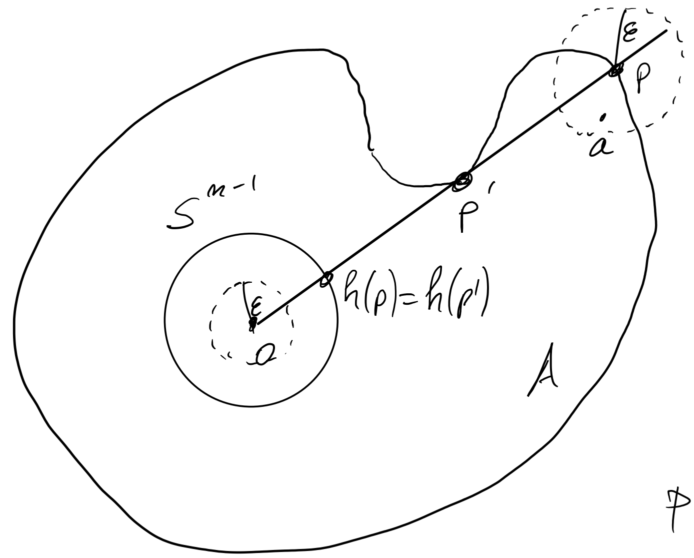
h è continua perché $0 \in A = A^\circ$ quindi $0 \notin \partial A$.

Inoltre h è suriettiva, perché dato $q \in S^{n-1}$, la semiretta $\ell = \{tq \mid t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ interseca A (per $t=0$), e interseca $\mathbb{R}^n \setminus A$ (per t molto grande, perché A è limitato).

Se per assurdo ℓ non intersecasse ∂A allora $\ell \cap (\bar{A} \setminus A) = \emptyset$, quindi ogni punto di ℓ sarebbe o fuori $\bar{A}$, oppure dentro A (perché non ci sono punti di ℓ in $\bar{A}$ ma non in A).

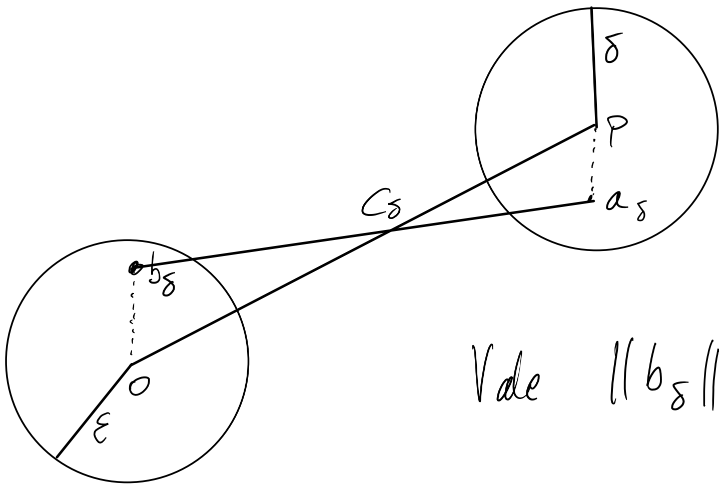
Allora $\ell = \left(\ell \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{A})\right) \cup (\ell \cap A)$ sarebbe unione disgiunta di aperti non vuoti: assurdo perché ℓ è connessa (essendo convessa e quindi connessa per archi).

Quindi h è suriettiva. Dimostriamo che è iniettiva, siano per assurdo $p, p' \in \partial A$ tali che $h(p) = h(p')$, poss. assumere $\|p\| > \|p'\|$.



Visto che $o \in A$, esiste $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c. $B_\varepsilon(o) \subseteq A$. D'altronde $p \in \overline{A}$, quindi $\forall \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ $\exists\, a_\delta \in A$ t.c. $a_\delta \in B_\delta(p)$. Prendiamo $\delta < \varepsilon$ e poniamo

$$b_\delta = \frac{(p - a_\delta)\varepsilon}{\delta}$$



Vale $\|b_\delta\| = \frac{\varepsilon}{\delta}\|p - a_\delta\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot \delta = \varepsilon$

quindi $b_\delta \in B_\varepsilon(o)$, e $b_\delta \in A$. Inoltre il segmento da o a p interseca il segmento da a_δ a b_δ in un punto c_δ, infatti:

$$c_\delta = \left(1 - \frac{\delta}{\varepsilon+\delta}\right)a_\delta + \frac{\delta}{\varepsilon+\delta}b_\delta = \left(\frac{\varepsilon+\delta-\delta}{\varepsilon+\delta}\right)a_\delta +$$

$$+ \frac{\cancel{\delta}}{\varepsilon+\delta}\left(p - a_\delta\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\cancel{\delta}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}a_\delta - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}a_\delta + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}p$$

$= \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta}p$ che è sul segmento fra 0 e p perché

$0 < \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\delta} < 1$. Visto che A è convesso, il punto c_δ è in A per ogni $\delta \in]0, \varepsilon[$, e quindi anche tutto il segmento fra 0 e c_δ. Inoltre per $\delta \to 0$ il punto c_δ tende a p, quindi tutti i punti sul segmento da 0 a p (tranne solo p!) sono in A.

Allora anche p' è in A: assurdo perché $p' \in \partial A$.

Concludiamo che h è biiettiva, da un compatto (∂A è chiuso e limitato) in un T2, quindi h è un omeomorfismo.

Definiamo ora $F : \overline{B_1(0)} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$q \longmapsto \begin{cases} \|q\| \cdot h^{-1}\left(q/\|q\|\right) & \text{se } q \neq 0 \\ 0 & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

Abbiamo: F è continua (anche in $q=0$ perché h^{-1} è limitata).

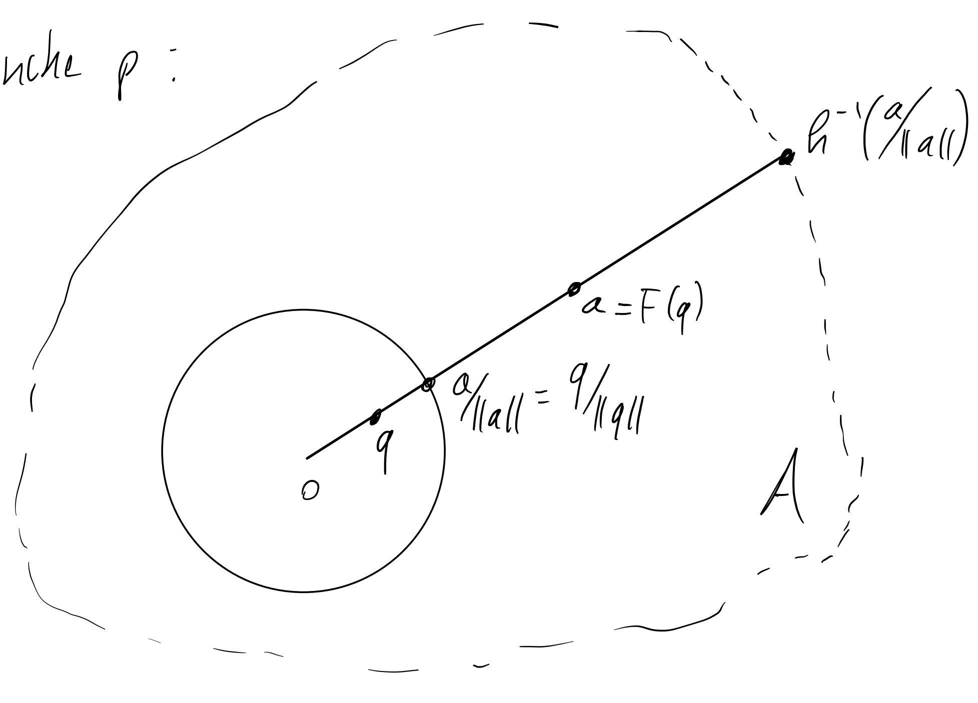
E' iniettiva, perché se $F(q) = F(q')$ ad es. con $q, q' \neq 0$, i punti q e q' sono sulla stessa semiretta contenente 0, perché $h(q/\|q\|)$ e $h(q'/\|q'\|)$ sono su questa semiretta.

Ma allora per il rag. di prima $h(q/\|q\|) = h(q'/\|q'\|)$, perché sono entrambi in ∂A, e allora $q = q'$.

Inoltre $\overline{B_1(0)}$ è compatto e $\mathbb{R}^n$ è T2, quindi la restrizione

$$\tilde{F} : \overline{B_1(0)} \longrightarrow F(B_1(0))$$
$$q \longmapsto F(q)$$

è un omeomorfismo. Su S^{n-1} coincide con h^{-1}, quindi $\tilde{F}$ manda S^{n-1} biiettivamente su ∂A, e manda i punti di $B_1(0)$ in punti di A: infatti abb. già visto che A contiene tutti i punti da 0 a $p = h^{-1}(a/\|a\|)$ escluso p, che è su ∂A, e A non contiene alcun punto oltre p sulla stessa semiretta, altrim. conterrebbe anche p:



Segue: $f = \tilde{F}\big|_{B_1(0)} : B_1(0) \longrightarrow \tilde{F}(B_1(0)) = A$

è un omeomorfismo.

Es. 6: Sia $p \in \mathbb{R}^2$, possiamo scriverlo come comb. lin. di $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, perché v e w formano una base di $\mathbb{R}^2$: $p = av + bw$.

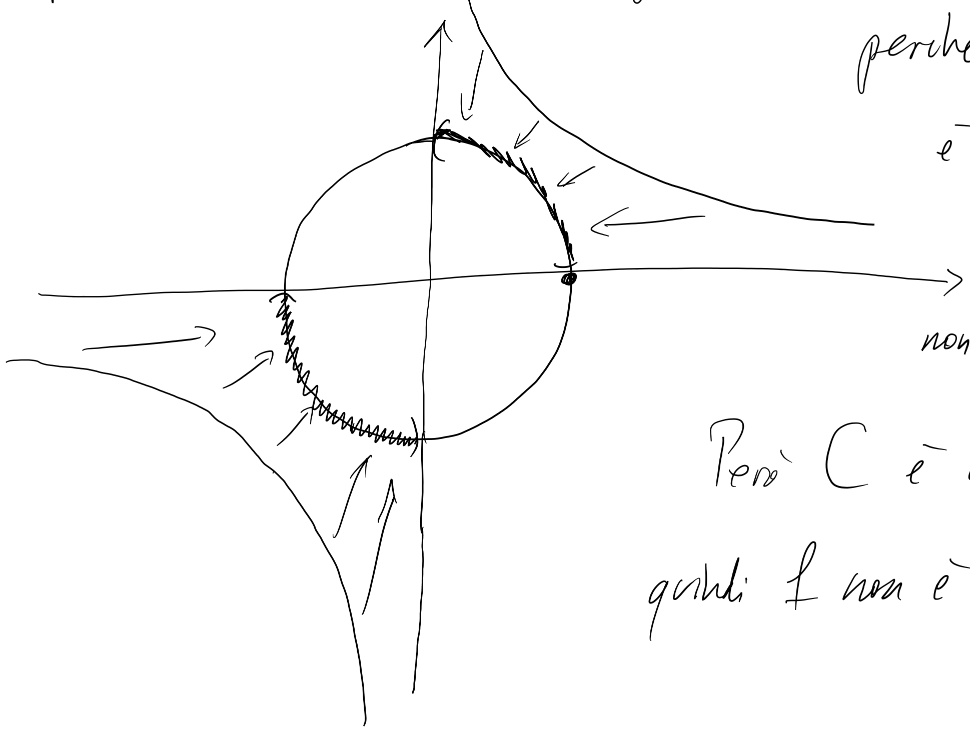
Prendiamo $q = [a]v + [b]w$ dove $[a]$ e $[b]$ sono le parti intere di a e b rispettivam., poniamo $a' = a - [a]$, $b' = b - [b]$, e osserviamo che $a', b' \in [0,1]$, che $p - q = a'v + b'w$, e che $f(p) = f(p-q)$ perché le formule dell'esercizio dicono $f(p+v) = f(p)$ e $f(p+w) = f(p)$ per ogni p. Allora l'immagine di f coincide con $f(K)$ dove $K = \{ tv + sw \mid t, s \in [0,1] \}$.

Inoltre l'insieme K è immagine di $[0,1] \times [0,1]$ tramite l'applicaz. continua $(t,s) \longmapsto tv + sw$, quindi K è compatto, e anche l'imm. di f. Questa immagine allora ha minimo e massimo.

Es. 7: f non è aperta, ad es. l'immagine dell'aperto

$$A = \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| > 1 \}$$ è

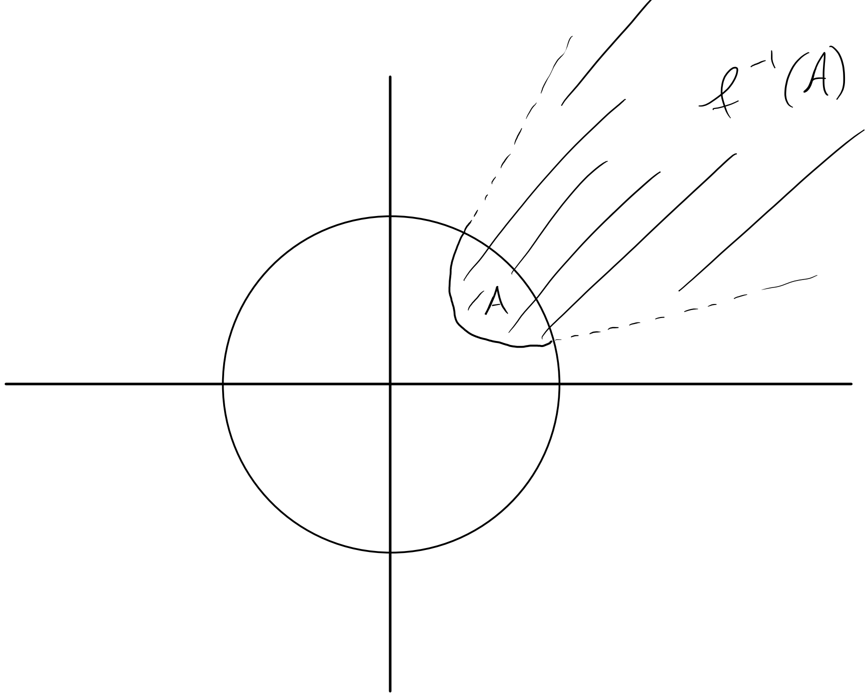
la circonferenza S^1, che non è aperta nel disco chiuso D^2. f non è neppure chiusa: l'immagine ad es. dell'iperbole C di equaz. $xy = 1$ non è chiusa in D^2, perché ad es. $(1,0)$ è aderente a $f(C)$ ma non appartiene a $f(C)$.



Però C è chiusa in $\mathbb{R}^2$, quindi f non è chiusa.

Però f è un'identificazione. Sia infatti $A \subseteq D^2$, supponiamo $f^{-1}(A)$ sia aperto e dim. che A è aperto in D^2. Dobbiamo trovare un aperto B in $\mathbb{R}^2$ tale che $D^2 \cap B = A$.

Per trovarlo, sfruttiamo questo fatto: $f^{-1}(A)$ contiene tutti i punti di $A \cap B_1(0)$. Poi, per ogni punto $p \in A \cap S^1$, $f^{-1}(A)$ contiene tutti i punti q di norma ≥ 1 tali che $p = \frac{q}{\|q\|}$, quindi $f^{-1}(A)$ contiene p, e poi tutti gli altri q di questo tipo sono fuori da D^2:



Da questo segue $A = f^{-1}(A) \cap D^2$, ma allora basta porre $B = f^{-1}(A)$, e vale: se $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^2$ allora A è aperto in D^2. Poi f è continua, quindi se viceversa A è ap. in D^2 allora $f^{-1}(A)$ è ap. in $\mathbb{R}^2$.

Segue che f è un'identificazione.

Es. 8: $$A^\circ = \bigcup_{\substack{E \subseteq X \\ \text{aperto}, \\ E \subseteq A}} E \quad , \quad B^\circ = \bigcup_{\substack{F \subseteq Y \\ \text{aperto}, \\ F \subseteq B}} F \quad ,$$

$$(A \times B)^\circ = \bigcup_{\substack{G \subseteq X \times Y \\ \text{aperto} \\ G \subseteq A \times B}} G .$$

Vale: $$A^\circ \times B^\circ = \bigcup_{\substack{E \subseteq X \text{ aperto} \\ E \subseteq A \\ F \subseteq Y \text{ aperto} \\ F \subseteq B}} \underbrace{E \times F}_{\substack{\text{è aperto in } X \times Y \\ \text{ed è cont. in } A \times B}}$$

quindi $A^\circ \times B^\circ \subseteq (A\times B)^\circ$ perchè ogni prodotto $E\times F$ compare fra i possibili $G \subseteq X\times Y$ aperti contenuti in $A\times B$.

Dimostraz. alternativa: $A^\circ \times B^\circ$ è aperto in $X\times Y$ ed è contenuto in $A\times B$, quindi $A^\circ\times B^\circ$ è contenuto nella parte interna $(A\times B)^\circ$.

Viceversa, consid. G come sopra: essendo aperto in $X\times Y$, possiamo scriverlo come unione:

$$G = \bigcup_{i\in I} U_i \times V_i$$

con $U_i \subseteq X$ e $V_i \subseteq Y$ aperti. Visto che $G \subseteq A\times B$, abb. $U_i \subseteq A$ e $V_i \subseteq B$, ma allora ogni $U_i\times V_i$ compare come un $E\times F$ nell'unione che dà $A^\circ \times B^\circ$. Segue: $U_i \times V_i \subseteq A^\circ \times B^\circ$ $\forall i$, e anche $G \subseteq A^\circ \times B^\circ$. Ma allora $(A\times B)^\circ \subseteq A^\circ \times B^\circ$, da cui

$$(A\times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ.$$

Es. 9: Possiamo scrivere $Y = \{ tp + (1-t)q \mid p,q\in X,\ \|p\| = \|q\| \}$.

Cerchiamo di scrivere Y come immagine di un compatto tramite un'appl. continua. Usiamo

$$K = \{ (p,q) \in X\times X \mid \|p\| = \|q\| \}$$

E' chiuso in $X\times X$, che è compatto, quindi K è compatto.

Usiamo
$$f: K \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$((p,q), t) \longmapsto tp + (1-t)q$$

Il dominio è compatto perché prodotto di compatti, e l'immagine è Y.

Visto che f è chiaramente continua, Y è compatto.

<u>ES. 10:</u> 1) Osserviamo: a) $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} [-n, n[$

b) dati $a, a' \in \mathbb{Z}$, b, b' con $a < b$ e $a' < b'$, abb.:

$$[a,b[\cap [a',b'[= \begin{cases} \emptyset & \text{oppure} \\ [\underbrace{\max\{a,a'\}}_{\in \mathbb{Z}}, \min\{b,b'\}[& \end{cases}$$

quindi $[a,b[\cap [a',b'[$ è vuoto opp. esso stesso un elem. di $\mathcal{B}$.

Segue che esiste una topologia $\mathcal{T}$ di cui $\mathcal{B}$ è base.

2) $\mathring{A} = \left]\frac{1}{2}, 2\right[^{\circ}$ = unione di tutti gli ap. cont. in A =

$\underset{\uparrow}{=}$ unione di tutti gli intervalli $[a,b[$ con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{R}$ contenuti

(ogni aperto si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}$)

in $A \underset{\uparrow}{=} [1, 2[$

se $a \neq 1$ e $b > a$ allora $[a,b[$ non è cont. in A

Per $\bar{A}$: visto che è il più piccolo chiuso contenente A, il suo complementare è il più grande aperto contenuto in $\mathbb{R}\setminus A$,

cioè $\mathbb{R}\setminus \bar{A} = (\mathbb{R}\setminus A)^\circ$. Ora $\mathbb{R}\setminus A =]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty[$.

L'intervallo $]-\infty, \frac{1}{2}[$ è aperto in $\mathcal{T}$, perché

$$]-\infty, \tfrac{1}{2}[= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} [-n, \tfrac{1}{2}[$$

Anche $[2, +\infty[$ è aperto in $\mathcal{T}$, perché

$$[2,+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 3}} [2, n[$$

Quindi $(\mathbb{R}\setminus A)^\circ$ contiene $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup [2,+\infty[$.

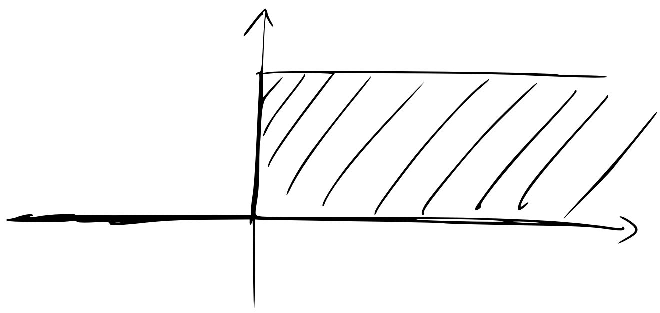
Però non può contenere $\frac{1}{2}$, perché se un intervallo del tipo $[a,b[$ contiene $\frac{1}{2}$ allora contiene punti sulla destra di $\frac{1}{2}$ e arbitrariam. vicini a $\frac{1}{2}$; tali punti però non sono in $\mathbb{R}\setminus A$.

Allora $(\mathbb{R}\setminus A)^\circ =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup [2,+\infty[$ e allora la chiusura di A è $[\frac{1}{2}, 2[$.

3) $\mathbb{R}$ con questa top. non è di Hausdorff, infatti se un aperto A contiene $\frac{1}{2}$ allora contiene un intervallo del tipo $[a,b[$ con $a\in\mathbb{Z}$, $a\leq\frac{1}{2}$, e $b\in\mathbb{R}$, $b>\frac{1}{2}$. Segue $a\leq 0$, quindi $[a,b[$ contiene anche 0, e A contiene anche 0. Quindi ogni intorno di $\frac{1}{2}$ contiene anche 0, quindi questa top. non è $T2$.

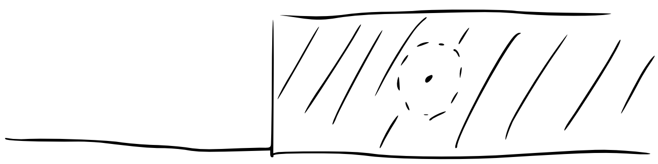
Es. 11: Consid. la proiezione $p: P\times Q \to P$, è un'applicazione aperta ma non sempre chiusa (P, Q spazi topologici).

Attenzione: la <u>restrizione</u> di p a $X \subseteq P\times Q$ potrebbe non essere aperta. Infatti qui $p: X \to \mathbb{R}$ non è aperta, abb. $P = Q = \mathbb{R}$, p è la proiezione sulla prima coordinata, e $X = \left( ]-\infty, 0] \times \{0\} \right) \cup \left([0, +\infty[\times [0,1] \right)$:



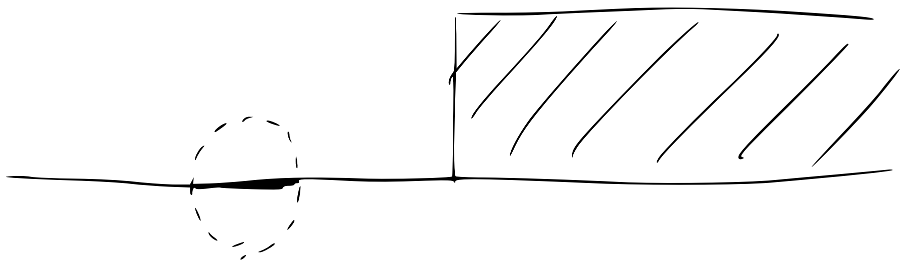
Troviamo un disco aperto tale che la sua intersezione con X (allora sarà un aperto di X) abbia proiezione a $\mathbb{R}$ non aperta.

ad es.:



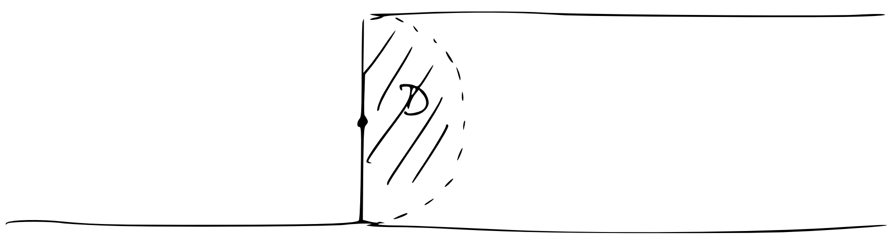
la sua proiez. è <u>aperta</u> in $\mathbb{R}$

Dobbiamo scegliere un disco aperto la cui intersezione con X <u>non è</u> un aperto di $\mathbb{R}^2$:



qui l'intersez. non è aperta in $\mathbb{R}^2$, ma la proiezione è aperta in $\mathbb{R}$

Scegliamo $D = B_{\frac{1}{2}}((0,\frac{1}{2}))$



La proiezione di $D \cap X$ su $\mathbb{R}$ è $[0,\frac{1}{2}[$ che non è aperto in $\mathbb{R}$.

Quindi effettivamente $p: X \to \mathbb{R}$ non è aperta.

Per dimostrare che p è un'identificazione, proviamo a dimostrare che è suriettiva e chiusa. Suriettività: ok.

Chiusura: potremmo usare il fatto che se R è compatto, allora la seconda proiezione $s: R \times S \to S$ è chiusa qualsiasi sia S.

Problema: X non è un prodotto. Ad es. se avessi avuto $\tilde{X} = \mathbb{R} \times [0,1]$ allora avrei avuto la prima proiezione $\mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ chiusa.

Vogleo comunque usare $\tilde{X}$, e osservo che X è contenuto in $\tilde{X}$ ed è chiuso in $\tilde{X}$. Allora se Z è un chiuso di X, Z è anche chiuso in $\tilde{X}$, ma allora $p(Z)$ è chiuso.

Segue: p è un'applicazione chiusa, quindi è un'identificazione.

ES. 12: Sia $C \subseteq \mathbb{R}^4$ chiuso, dimostriamo che $f(C)$ è chiuso.

Sia $p \in \mathbb{R}$ aderente a $f(C)$, prendiamo $a > |p|$, e osserviamo che $[-a, a]$ contiene p e un intorno di p.

Allora p è aderente anche a $[-a, a] \cap f(C)$, in particolare ci sono punti di C che vanno in $[-a, a]$, cioè

$C \cap f^{-1}([-a, a]) \neq \emptyset$.

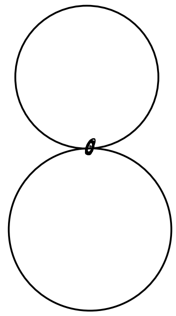
Consid. $K = f^{-1}([-a, a])$: è limitato e chiuso, quindi è compatto. La restriz. $f|_K : K \to [-a, a]$ è continua da un compatto in un T2, quindi è chiusa, e $C \cap K$ è chiuso in K (e in $\mathbb{R}^4$). Allora $f(K \cap C)$ è chiuso.

Ma $f(K \cap C) = \{ f(p) \mid p \in f^{-1}([-a, a]) \text{ e } p \in C \}$

$= \{ f(p) \mid f(p) \in [-a, a] \text{ e } p \in C \} =$

$= f(C) \cap [-a, a]$

e sappiamo che p è aderente ad esso. Allora $p \in f(C) \cap [-a, a]$, in particolare $p \in f(C)$, quindi $f(C)$ è chiuso.

Es. 13: $X =$ 

1) X non è omeomorfo a S^1 perché $S^1 \setminus \{p\}$ è connesso $\forall p \in S^1$, invece $\exists q \in X \mid X \setminus \{q\}$ è sconnesso.

2) X non è omeomorfo a $[0,1]$ perché per infiniti $x \in X$ la differenza $X \setminus \{x\}$ è connessa, invece per solo due valori di $a \in [0,1]$ la differenza $[0,1] \setminus \{a\}$ è connessa (cioè per $a=0$ e $a=1$).

Es. 14: 1) X è un sottoinsieme di $M_n(\mathbb{R})$, def. come

$$X = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{esiste } \lambda \in [0,1] \text{ autovalore di } A\} =$$

$$= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{esiste } \lambda \in [0,1] \text{ t.c. } p_A(\lambda) = 0\}$$

dove $p_A(t) = \det(I_n - tA)$ è il pol. caratt. di A.

Cerchiamo di ottenere X come immagine di un'applicaz. chiusa, sfruttando il fatto che il numero λ varia nel compatto $[0,1]$.

"Aggiungiamo" λ come parametro della matrice $A \in X$, cioè definiamo

$$Y = \{ (A, \lambda) \in M_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \mid p_A(\lambda) = 0 \}$$

Questo è un chiuso in $M_n(\mathbb{R}) \times [0,1]$, perché è controimm. di $\{0\}$ tramite l'appl. continua

$$M_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(A, \lambda) \longmapsto p_A(\lambda)$$

È continua perché $p_A(t)$ è un polinomio in t con coeff. che sono polinomi nelle entrate di A.

Inoltre gli elem. di X sono ottenuti dalle coppie $(A, \lambda) \in Y$ dimenticando λ, cioè $X = \pi(Y)$ dove

$$\pi : M_n(\mathbb{R}) \times [0,1] \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

è la proiez. sul primo fattore. È chiusa perché $[0,1]$ è compatto, quindi X è chiuso.

2) Oss. che la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ ha zero come autovalore $\forall a \in \mathbb{R}$, quindi $A \in X$.

Identificando $M_n(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n^2}$, il punto A ha norma $|a|$, e a è a piacere, quindi X è chiuso ma non limitato, e allora X non è compatto.