Es. 1: $\Rightarrow$) Supp. Y di Hausdorff, siano $x, x' \in X$ t.c. $y = f(x) \neq f(x') = y'$

prendiamo due intorni aperti U, U' di y e y' rispettivamente con $U \cap U' = \emptyset$. Allora $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(U')$ sono aperti saturi disgiunti, uno contiene x e l'altro x'.

$\Leftarrow$) Siano $y, y' \in Y$, scegliamo $x \in f^{-1}(y)$ e $x' \in f^{-1}(y')$.

Supp. $y \neq y'$, allora esistono aperti saturi $V \ni x$, $V' \ni x'$ disgiunti; le loro immagini $f(V)$, $f(V')$ sono disgiunte perché V e V' sono saturi, sono aperte, e contengono y e y' rispettivam. Quindi Y è T2.

Es. 2: 1) Entrambi $X/_\sim$ e $X/_\approx$ sono connessi, perché X è connesso e le proiezioni $\pi_1 : X \to X/_\sim$ e $\pi_2 : X \to X/_\approx$ sono continue e suriettive.

Il quoz. $X/_\approx$ è anche compatto, perché ogni punto di X è in relazione con almeno un punto di $E = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \leq 2\}$.

Infatti dato $q \in \mathbb{R}^2$, se $\|q\| > 2$ allora q è in relazione con qualsiasi punto di norma 2. Segue: $\pi_2(\underbrace{E}_{\text{compatto}}) = X/_\approx$, quindi

$X/_\approx$ è compatto.

Invece $X/_\sim$ non è compatto. Infatti gli aperti

$]-n, n[\times \mathbb{R}$ di X sono saturi per π_1 $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

le loro immagini sono dunque aperte in $X/_\sim$, formano un ricoprimento aperto da cui non si può estrarre un sottoric. finito.

Infatti se per assurdo avessimo

$$X/\sim \; = \bigcup_{n=1}^{N} \pi_1\left( ]-n, n[\times \mathbb{R} \right) = \pi_1\left( ]-N, N[\times \mathbb{R} \right)$$

allora dovrebbe esistere $(a, b) \in \;]-N, N[\times \mathbb{R}$ t.c.

$(a, b) \sim (N+1, 0)$, ma avremmo allora $a = N+1$: assurdo.

2) Osserviamo che la rel. d'equivalenza $\sim$ può essere anche indotta da un sottogruppo $G \subseteq Omeo(X)$, infatti poniamo

$$G = \{ f_n : X \to X \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

dove $f_n(x, y) = (x, y-n)$.

Allora $(a, b) \sim (a', b') \iff \begin{cases} a = a' \\ b - b' = n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \exists n \in \mathbb{Z} \mid$

$(a, b-n) = f_n(a, b) = (a', b')$.

Per determinare se $X/\sim$ è T2, allora possiamo usare

$$D = \{ (p, g(p)) \mid p \in X, \; g \in G \} \subseteq X \times X$$

Abbiamo: $D = \{ ((a,b), (a, b-n)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid a, b \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{Z} \}$

che è un chiuso. Questo si verifica facilmente usando

l'applicazione
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ ((a,b), (a',b')) &\longmapsto ((a, a'), b-b') \end{aligned}$$

È continua, e D è la controimmagine del chiuso

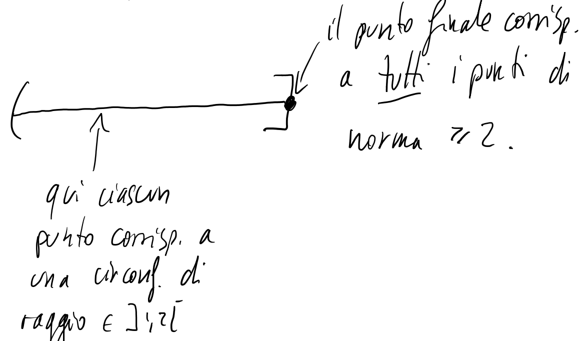
$$\Delta \times \mathbb{Z}$$

dove $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ è la diagonale. Visto che D è chiuso, il quoz. $X/_\sim$ è di Hausdorff.

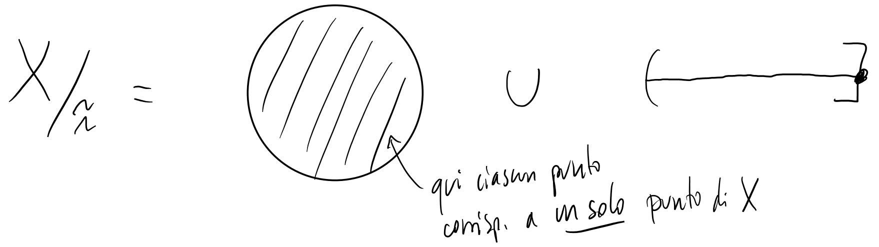
Consid. ora $X/_\approx$. Non è chiaro se è possibile realizzare questo quoziente usando un gruppo G come prima, quindi dovremo dare una dim. diretta che $X/_\approx$ è T2, o non lo è.

Cerchiamo di immaginare $X/_\approx$ geometricamente: i punti di norma ≥ 2 sono tutti identificati fra loro, invece quelli di norma $\in]1,2[$ sono identificati fra loro se hanno stessa norma. Quindi le circonf. di centro O e raggio in $]1,2[$ sono classi di equivalenza.

Quindi possiamo immaginare che tutti i punti di norma > 1 diventano un intervallo semiaperto:



Invece il disco chiuso di raggio 1 rimane invariato nel quoziente, quindi $X/_\approx$ è l'unione di questi due oggetti:

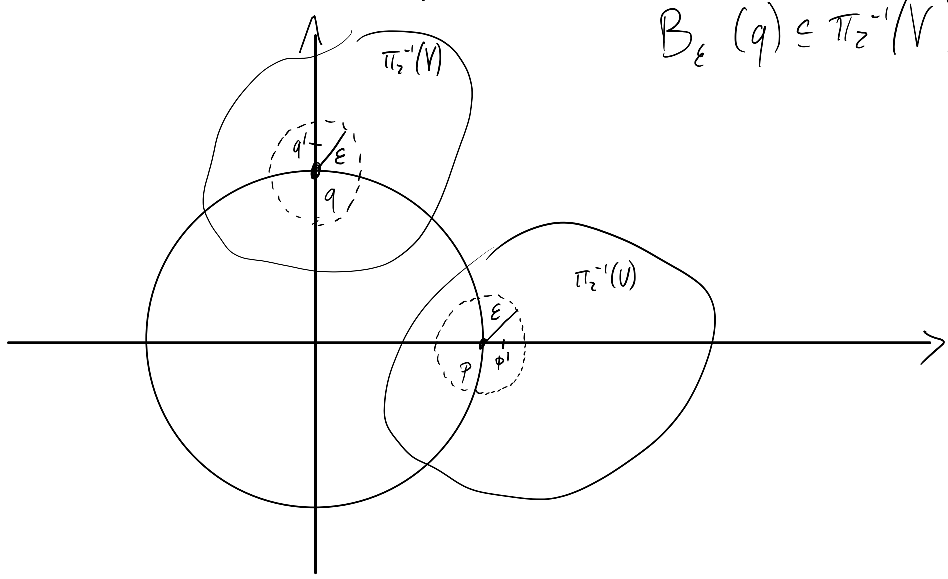


La cosa complicata è come sono attaccati: l'estremità sinistra dell'intervallo è attaccata a <u>tutto</u> il bordo del disco!

Quindi $X/_\approx$ <u>non è</u> T2, perché due punti diversi del bordo del disco hanno intorni che per forza contengono un pezzetto in comune dell'intervallo.

Verifica: siano $p=(1,0)$, $q=(0,1) \in X$. Osserviamo che

$[p] = \{p\} \neq \{q\} = [q]$ quindi abbiamo due punti diversi in $X/_\approx$. Siano per assurdo U, $V \subseteq X/_\approx$ intorni disgiunti rispett. di $[p]$ e $[q]$, allora $\pi_2^{-1}(U)$ e $\pi_2^{-1}(V)$ sono aperti di $\mathbb{R}^2$ contenenti risp. p e q; sia $\varepsilon>0$ t.c. $B_\varepsilon(p) \subseteq \pi_2^{-1}(U)$, $B_\varepsilon(q) \subseteq \pi_2^{-1}(V)$.



Allora $p' = (1+\frac{\varepsilon}{2}, 0)$ e $q' = (0, 1+\frac{\varepsilon}{2})$ sono in $\pi_2^{-1}(U)$ e $\pi_2^{-1}(V)$ rispettivam., ma $\|q'\| = \|p'\| > 1$ quindi $q' \approx p'$, e allora $U \ni [p'] = [q'] \in V$: assurdo.

Segue: $X/_\approx$ <u>non è</u> T2.

Es. 3: Il quoziente per un gruppo di omeom. è sempre un'appl. aperta.

Sia $C = \{ n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$, è un chiuso di $\mathbb{R}$.

L'immagine $\pi(C)$ non contiene $[0]$, perché nessun punto di C è in relazione con 0, tuttavia $[0]$ è aderente a $\pi(C)$.

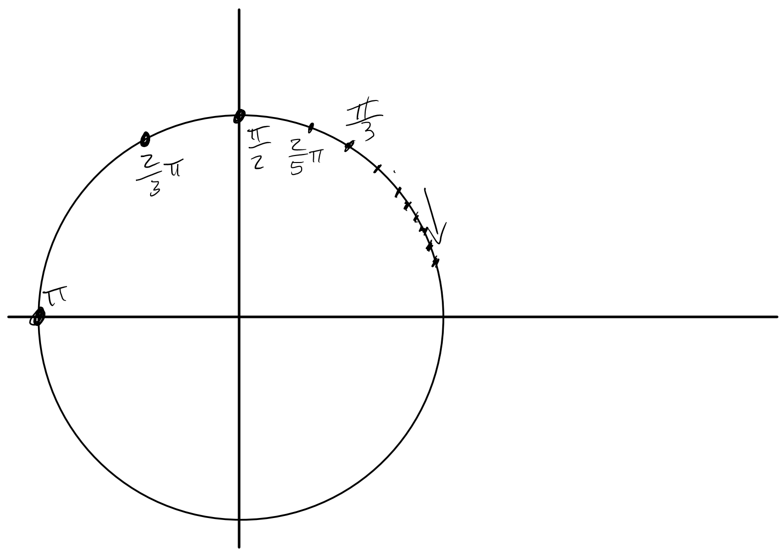
Questo è chiaro se, come a lezione, immaginiamo π come la retta $\mathbb{R}$ che si avvolge sulla circonferenza:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

L'immagine di C in S^1 è fatta dai punti

$$\left(\cos\left(2\pi\left(n + \tfrac{1}{n}\right)\right), \sin\left(2\pi\left(n+\tfrac{1}{n}\right)\right)\right) =$$

$$= \left(\cos\left(\tfrac{2\pi}{n}\right), \sin\left(\tfrac{2\pi}{n}\right)\right)$$ che tendono a $(1,0)$ per $n \to +\infty$.



Dimostriamo che $[0]$ è aderente a $\pi(C)$ senza usare S^1.

Sia $U \subseteq \mathbb{R}/G$ intorno di $[0]$, consid. $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$, è un aperto contenente 0. Sia $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.

$$]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\subseteq \pi^{-1}(U)$$

allora $\frac{1}{n+1} \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ e $\frac{1}{n+1} \sim (n+1) + \frac{1}{n+1} \in C$.

Quindi $[\frac{1}{n+1}] \in \pi(C) \cap U$, allora $\pi(C)$ interseca ogni intorno di $[0]$, cioè $[0]$ è aderente a $\pi(C)$.

<u>Es. 4</u>: Usiamo $f : D \to D$, $z \mapsto z^2$. Vale $f(z) = f(-z)$ $\forall z \in D$, quindi

f passa al quoziente:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & D \\ D/G \arrow[ur, "h \text{ continua}"'] & \end{tikzcd}$$

$f = h \circ \pi$

inoltre h è biiettiva, infatti h è suriettiva (perché f è suriettiva) e se $h([z]) = h([w])$ allora $f(z) = h([z]) = h([w]) = f(w)$

quindi $z^2 = w^2$ e $z = \pm w$, da cui $[z] = [w]$.

Inoltre D/G è compatto perché immagine di D tramite π, e D è T2: segue h <u>omeomorfismo</u>.

<u>Es. 5</u>: Siano $[p], [q] \in X/\sim_K = Y$ con $[p] \neq [q]$.

Supp. $p, q \notin K$, e ricordiamo che K è chiuso perché X è T2.

Ric. in questo caso $[p] = \{p\}$ e $[q] = \{q\}$.

Siano $U \in \mathcal{I}(p)$, $V \in \mathcal{I}(q)$ con $U \cap V = \phi$, supp. U, V aperti, e def.

$$U' = U \setminus K \ , \quad V' = V \setminus K$$

sono disgiunti, e intorni rispett. di p e q. Inoltre U' e V' sono aperti saturi rispetto alla proiezione $\pi: X \to Y$, perché non intersecano K. Allora $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono aperti disgiunti e contengono rispett. $[p]$ e $[q]$.

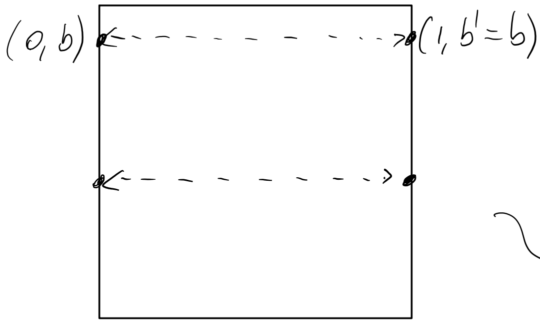
Supp. ora $p \notin K$, $q \in K$, quindi $\{p\} = [p]$ e $K = [q]$.

A lezione abb. dim. che K è chiuso in X, trovando aperti $V_1, \dots, V_n$ e $U_1, \dots, U_n$ di X tali che

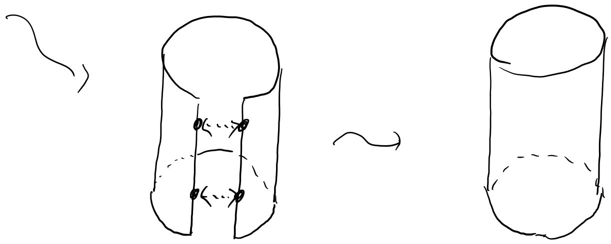
$$K \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n \ , \qquad q \in U_1 \cap \dots \cap U_n,$$

e vale $U_i \cap V_i = \phi$ $\forall i$. Allora poniamo $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$, $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$. Segue: $U \cap V = \phi$, U è intorno di p, V contiene K. Visto che V contiene K, V è saturo. Visto che U non interseca K, U è saturo. Allora $\pi(U)$ e $\pi(V)$ sono intorni aperti rispett. di $[p]$ e $[q]$, e sono disgiunti, quindi $X/\sim_K$ è T2.

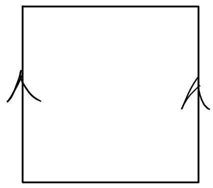
Es. 6: 1) Stiamo identificando i punti sul lato sinistro del quadrato con quelli del lato destro alla stessa altezza:



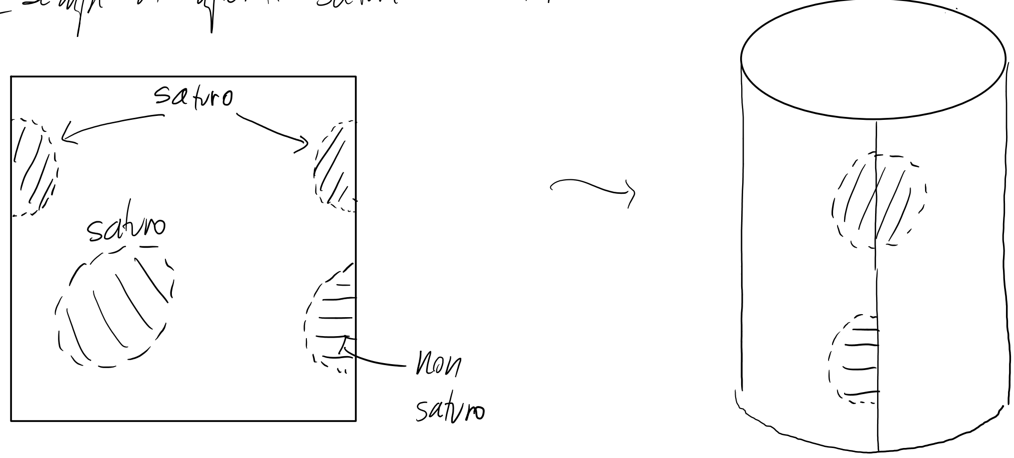
Intuitivamente, otteniamo la sup. laterale di un cilindro:



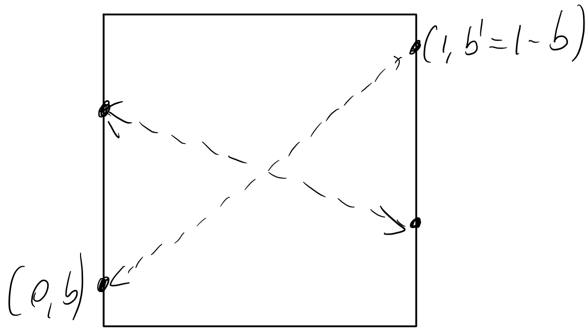
Si denota anche con delle frecce:



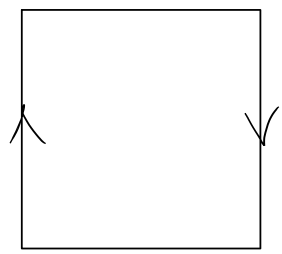
Esempi di aperti saturi e non:



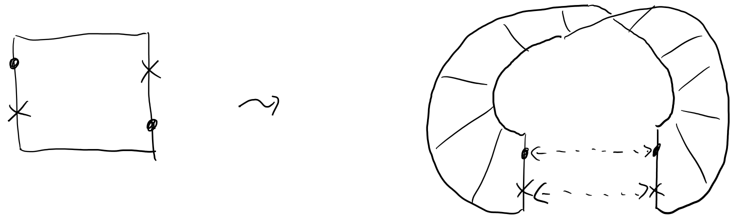
2) Qui stiamo identificando i punti sui lati sinistro e destro, ma in modo „incrociato":



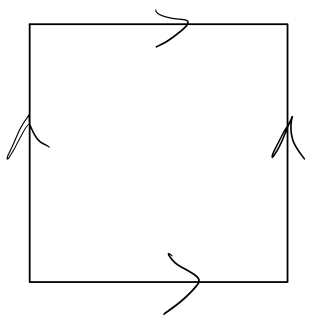
cioè



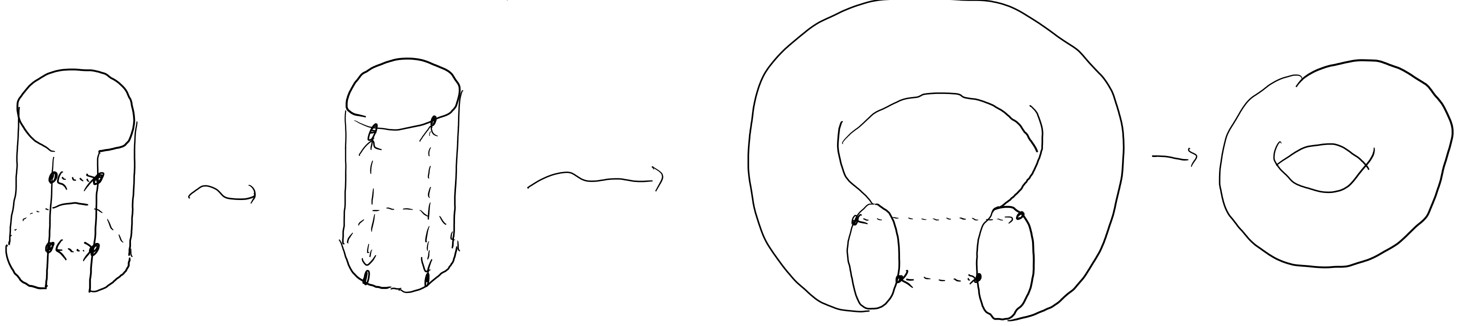
E' un nastro di Möbius:



3) Qui identifichiamo i lati sinistro e destro come in 1, poi quelli in alto e in basso nello stesso modo:



Otteniamo un toro:



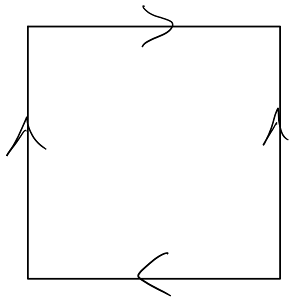
Si dim. facilmente che otteniamo $S^1 \times S^1$, usando l'applicaz.

$$[0,1]^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$$

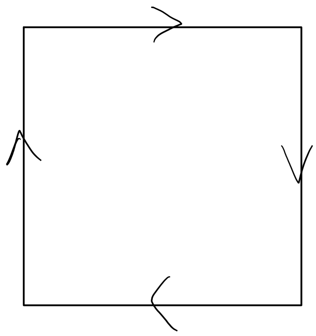
$$(s,t) \longmapsto \big((\cos(2\pi s), \sin(2\pi s)), (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\big)$$

e facendola passare al quoziente nel solito modo.

5) Qui dopo aver ottenuto la sup. laterale del cilindro, identifichiamo i punti sulle due circonferenze, ma „percorrendole" in senso opposto:



4) Si identificano i lati opposti percorsi in senso opposto:



Difficile da immaginare!

Es. 7: 1) $\mathbb{P}^0_{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{P}^0_{\mathbb{C}}$ sono fatti da un solo punto, quindi sono connessi.

Per $n \geq 1$ abb. $\mathbb{R}^{\overbrace{n+1}^{\geq 2}} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ connessi per archi, allora $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ e $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sono connessi per archi perché immagini di connessi per archi. Segue che sono connessi.

2) Dato $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, abbiamo $p \sim p/\|p\| \in S^{n+1}$, quindi $[p]$ è classe anche di un punto sulla sfera. Segue che $\pi|_{S^{n+1}} : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è suriettiva.

3) Da 2) segue che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è immagine del compatto S^n tramite π continua, quindi $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è compatto.

4) Identifichiamo $\mathbb{C}^{n+1}$ con $\mathbb{R}^{2n+2}$, allora p e $p/\|p\|$ sono nella stessa classe $\forall p \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ (dove $\|p\|$ è la norma euclidea su $\mathbb{R}^{2n}$, che poi è la stessa norma indotta dal prodotto Hermitiano standard su $\mathbb{C}^{n+1}$), e $p/\|p\| \in S^{2n+1}$.

La dim. prosegue in modo simile a 2) e 3).

5) Si tratta delle omotetie:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ p &\longmapsto \lambda p \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fissato, e

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \\ p &\longmapsto \lambda p \end{aligned}$$

con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ fissato.

6) Una coppia (p, q) con $p, q \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è in D se e solo se p e q sono linearmente dipendenti.

Ponendo $p = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$,

sono lin. dip. se e solo se

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \leq 1,$$

il che è equivalente a richiedere che i det. di tutti i minori 2x2 siano nulli. Allora

$$D = \left\{ \left(\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right) \;\middle|\; a_i b_j - a_j b_i = 0 \;\forall i \neq j \right\}$$

quindi D è un chiuso di $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ perché intersez. delle controimmagini di 0 tramite le applicaz.

$$(p, q) \longmapsto a_i b_j - a_j b_i$$

(un'applicaz. per ogni scelta di $i \neq j$).

7) Segue: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è T2, e analogam. anche $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, per un risultato visto a lezione su X/G dove $G \subseteq \mathrm{Omeo}(X)$.

Es. 8: 1) Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ chiuso, l'immagine $\pi(B)$ è chiusa se e solo se $\pi^{-1}(\pi(B))$ è chiuso in $\mathbb{R}$. Oss.:

$$\pi^{-1}(\pi(B)) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in B \mid [x] = [y] \}.$$

Ora: se $y \in B$ non è in $\mathbb{Z}$, allora $[y] = \{y\}$ e $x = y \in B$.

Se invece $y \in B$ è in $\mathbb{Z}$, allora $[y] = \mathbb{Z}$ e ogni elem. di $\mathbb{Z}$ è in rel. con y.

Segue: $$\pi^{-1}(\pi(B)) = \begin{cases} B & \text{se } B \cap \mathbb{Z} = \emptyset \\ B \cup \mathbb{Z} & \text{se } B \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset. \end{cases}$$

Nel primo caso $\pi^{-1}(\pi(B))$ è chiuso, nel secondo caso anche perché è unione di due chiusi.

2) Consid. $s: X \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, oss. che $C = s^{-1}\left(\left\{ n + \frac{\sqrt{2}}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}\right)$.
$(a,b) \mapsto a+b$

L'insieme $\left\{ n + \frac{\sqrt{2}}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}$ è chiuso in $\mathbb{R}$, quindi

C è chiuso in $X \times \mathbb{Q}$.

Sia poi $(a,b) \in C$ e $(x,y) \in X \times \mathbb{Q}$ t.c.

$(\pi \times id_{\mathbb{Q}})(a,b) = (\pi \times id_{\mathbb{Q}})(x,y)$

cioè $\pi(a) = \pi(x)$ e $b = y$. Dimostriamo che $a = x$, così che $(x,y) \in C$. Supp. che $a, x \in \mathbb{Z}$; visto che $(a,b) \in C$ esiste $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c. $a + b = n + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Ma $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}$: seguirebbe $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: assurdo.

Quindi $a, x \notin \mathbb{Z}$, da cui $a = x$ e $(x,y) \in C$. Quindi C è saturo rispetto a $\pi \times id_{\mathbb{Q}}$.

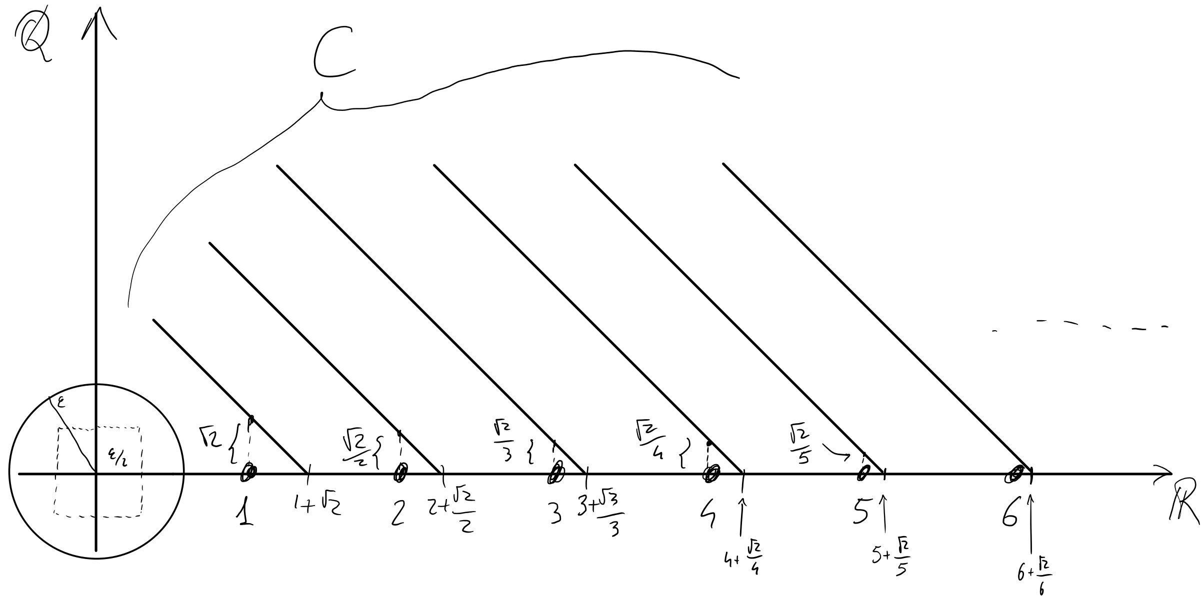
3) Prima di tutto $(\pi(0), 0) \notin \pi(D)$, perché se per assurdo $(\pi(0), 0) \in D$ allora sia $a \in \mathbb{R}$ t.c. $[a] = \pi(0)$ e $(a,0) \in C$, sia $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c. $a + 0 = n + \frac{\sqrt{2}}{n}$, segue $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: assurdo.

Quindi $(\pi(0),0) \notin D$; verifichiamo che $(\pi(0),0)$ è aderente a D.

Sia $U \subseteq Y \times \mathbb{Q}$ intorno di $(\pi(0),0)$, consid. $(\pi \times id_{\mathbb{Q}})^{-1}(U) = V$,

oss. che V contiene $\mathbb{Z} \times \{0\}$ ed è un aperto di $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$; sia

$\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(0,0) \subseteq V$ palla aperta ma in $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.



Prendiamo $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c. $\frac{\sqrt{2}}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, e sia

$$\xi \in \left]0, \frac{\sqrt{2}}{n_0}\right[\cap \mathbb{Q}$$

Allora $\left(n_0 + \frac{\sqrt{2}}{n_0} - \xi, \xi\right)$ è in C, perché soddisfa

$$\left(n_0 + \frac{\sqrt{2}}{n_0} - \xi + \xi\right) = n_0 + \frac{\sqrt{2}}{n_0},$$

inoltre è in relazione col punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{n_0} - \xi, \xi\right)$, per cui vale

$$\max\left\{\frac{\sqrt{2}}{n_0} - \xi, \xi\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$ (infatti $\xi < \frac{\sqrt{2}}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ e

$\frac{\sqrt{2}}{n_0} - \xi < \frac{\sqrt{2}}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$)

D'altronde il quadrato dei punti (a,b) con $\max\{|a|,|b|\} < \frac{\varepsilon}{2}$ è tutto contenuto in $B_\varepsilon(0,0)$, perciò

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{n_0} - \xi, \xi\right) \in V \cap C$$

da cui $$\left(\left[\frac{\sqrt{2}}{n_0} - \xi\right], 0\right) \in U \cap D \neq \emptyset.$$

Segue: $([0], 0)$ è aderente a D, quindi D non è chiuso, e $\pi \times id_{\mathbb{Q}}$ non è un'identificazione.

<u>Es. 9</u>: Ogni matrice di $SL(n, \mathbb{R})$ si può scrivere come prodotto di matrici del tipo

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & t & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow \text{colonna } j \\ \uparrow & \\ \text{riga } i & \end{array} = u_{i,j}(t) \quad (i \neq j)$$

cioè $u_{i,j}(t)$ è come la matrice identità, tranne che in un entrata al posto i,j con $i \neq j$, dove invece che 0 c'è un numero t qualsiasi.

Cioè $\forall g \in SL(n, \mathbb{R})$ esistono $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$, $i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_m$ interi fra 1 e n con $i_k \neq j_k$ $\forall k$, tali che

$$g = u_{i_1, j_1}(t_1) \cdot \ldots \cdot u_{i_m, j_m}(t_m)$$

Allora $\alpha(t) = u_{i_1, j_1}(t \cdot t_1) \cdot \ldots \cdot u_{i_m, j_m}(t \cdot t_m)$

al variare di $t \in [0,1]$ è un cammino in $SL(n, \mathbb{R})$ da

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{matr. identità } n \times n}}{I_n} = u_{i_1, j_1}(0) \cdot \ldots \cdot u_{i_m, j_m}(0)$$

alla matrice g. Quindi esistono cammini da I_n a g $\forall g \in SL(n, \mathbb{R})$, e da g a I_n (basta percorrerli in senso inverso).

Dati ora $g, h \in SL(n, \mathbb{R})$, basta concatenare il cammino β da g a I_n col cammino γ da I_n ad h per ottenere un cammino da g ad h.

Es. 10: $O(n, \mathbb{R})$ e $U(n)$ sono compatti perché sono chiusi e limitati. Sono chiusi perché sono definiti da „condizioni chiuse" in $\mathbb{R}^{n^2}$ e $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ rispettivamente; sono limitati perché una matrice $A \in O(n, \mathbb{R})$ ha le colonne che formano una base ortonormale rispetto al prod. scalare standard di $\mathbb{R}^n$, quindi tutte le entrate hanno modulo ≤ 1.

Analogamente vale per $A \in U(n)$ e il prod. Hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$.