Es. 1: 1) Ricoprim. aperto che non ammette sottoric. finiti:

$$\mathcal{R} = \{]\tfrac{1}{n}, 1[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$$

2) $\mathcal{R} = \{ [0, 1 - \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$

3) $\mathcal{R} = \{ ([0, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{n}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{n}, 1]) \cap \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 4} \}$

Es. 2: 1) $\{ [-n, n[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$ e anche $\{]-n, n[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \}$

sono ric. aperti senza sottoric. finiti.

2) $\{1\} = Y \cap \underbrace{[1,2[}_{\text{aperto in } X}$

3) $\{ [0, 1 - \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{Z}_{>1} \} \cup \{1\}$ è un ricoprim. ap. di Y senza sottoric. finiti.

Es. 3: Visto a lezione.

Es. 4: Sia $\mathcal{R}$ ric. aperto di $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ con X_i sottosp. compatto $\forall i$. Visto che X_i è compatto, esiste una sottofam. $\mathcal{R}_i$ di $\mathcal{R}$ t.c.

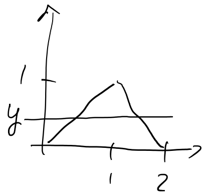
$$X_i \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{R}_i} A$$

(basta osservare che $\{ A \cap X_i \mid A \in \mathcal{R} \}$ è un ric. aperto di X_i, ed estrarre da esso un numero finito di insiemi A che ricoprono X_i).

Allora $R_1 \cup \dots \cup R_n$ è un sottoric. finito di R.

<u>Es. 5:</u> Le proprietà 1) e 2) sono ovvie. La controimm.

di $y \in [0,1]$ è:



$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } y = 0 \\ \{1\} & \text{se } y = 1 \\ \{y, 2-y\} & \text{se } y \in]0,1[\end{cases}$$

(perché $f(y) = y$ e $f(x) = y$ con $y = 2 - x$, da cui $x = 2 - y$)

Si tratta sempre di insiemi finiti, quindi sono compatti.

4) Sia $A \subseteq [0,2[$ aperto; per ogni $a \in A$ scegliamo un intervallo contenente a, che sia aperto in $[0,2[$, e contenuto in A:

- se $a = 0$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $I_a = [0, \varepsilon[\subseteq A$;
- se $a \in]0,1[$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $I_a =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq A \cap]0,1[$
- se $a = 1$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $I_a =]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subseteq A$
- se $a > 1$ scelgo $\varepsilon > 0$ t.c. $I_a =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq A \cap]1,2[$

Allora: $f(I_a) = [0, \varepsilon[$ nel 1° caso

$f(I_a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ nel 2° caso

$f(I_a) =]1-\varepsilon, 1]$ nel 3° caso

$$f(I_a) =]2-a-\varepsilon, 2-a+\varepsilon[\quad \text{nel 4° caso}$$

e in tutti i casi queste immagini sono aperte in $[0,1]$.

Allora $f(A) = f\left(\bigcup_{a\in A} I_a\right) = \bigcup_{a\in A} f(I_a) = $ aperto in $[0,1]$.

Es. 6: Sia $\mathcal{R}$ ricoprim. aperto qualsiasi di X. Per ogni $p \in X$ scegliamo $U_p \in \mathcal{R}$ e $A_p \in \mathcal{B}$ tali che

$$p \in A_p \subseteq U_p$$

La famiglia $\{A_p \mid p \in X\}$ è un ricoprim. aperto di X fatto di elem. di $\mathcal{B}$: estraiamo un sottoric. finito $\{A_{p_1}, \dots, A_{p_n}\}$:

$$X = A_{p_1} \cup \dots \cup A_{p_n}$$

Allora $X = U_{p_1} \cup \dots \cup U_{p_n}$, cioè abb. trovato un sottoric. finito di $\mathcal{R}$.

Es. 7: $\Longrightarrow$) Se K è compatto allora è limitato, altrimenti non potrei estrarre un sottoric. finito dal ricoprimento

$$\{ K \cap]-N,N[^n \mid N \in \mathbb{Z}_{>0} \}$$

Quindi $\exists a \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c. $K \subseteq [-a,a]^n$.

Quindi K è compatto in $[-a,a]^n$ che è T2, per cui K è chiuso in $[-a,a]^n$ che è chiuso in $\mathbb{R}^n$, quindi K è chiuso in $\mathbb{R}^n$.

$\underline{\Leftarrow)}$ Sia K chiuso e limitato, e sia $a \in \mathbb{R}_{>0}$ t.c. $K \subseteq [-a,a]^n$. Allora K è chiuso nel compatto $[-a,a]^n$ (che è compatto perché $[-a,a]$ è omeom. a $[0,1]$ che è compatto, e prodotti (finiti) di compatti sono compatti).

Segue: K è compatto.

$\underline{\text{Es. 8:}}$ 1) Sia $A_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in I$, supponiamo $A_i \neq \emptyset$ e $A_i \neq \mathbb{R}$ $\forall i$. Allora $A_i =]a_i, +\infty[$ per un $a_i \in \mathbb{R}$, e:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } \inf\{a_i \mid i \in I\} = -\infty \\ ]\inf\{a_i \mid i \in I\}, +\infty[& \text{se } \inf \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \begin{cases} \emptyset & \text{se } \sup\{a_i \mid a_i \in I\} = +\infty \\ ]\sup\{a_i \mid i \in I\}, +\infty[& \text{se } \sup \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Quindi unioni di elem. di $\mathcal{T}$ e intersez. di elem. di $\mathcal{T}$ sono tutte in $\mathcal{T}$ (il caso in cui qualche A_i è $\emptyset$ opp. $\mathbb{R}$ segue facilmente da quanto fatto).

2) $\mathcal{T}$ è meno fine della top. euclidea, quindi anche la top. di sottosp. su Y è meno fine di quella euclidea. Allora ogni ric. aperto di Y rispetto alla top. di sottosp. indotta da $\mathcal{T}$ è un ricopr. aperto anche in top. euclidea: segue che ammette sottoric. finiti perché Y è compatto in top. euclidea.

W non è compatto: $\mathcal{R} = \{]0+\frac{1}{n}, +\infty[\cap W \mid n \in \mathbb{Z}_{>1} \}$

è un ricoprim. aperto di W senza sottoric. finiti.

Z è compatto: sia $\mathcal{R}$ ric. aperto di Z, sia $A \in \mathcal{R}$ aperto che contiene 0, allora $A = B \cap Z$ dove B è un aperto di X contenente 0. Un tale B contiene per forza tutto $[0, +\infty[$, quindi anche Z, cioè $\{A\}$ è un sottoric. di $\mathcal{R}$.

Es. 9: 1) $\{ f(K_n^\circ) \}$ è un ricoprimento aperto di Y, perché $\{K_n^\circ\}$ è un ric. ap. di X. Visto che $\{0\} \times [0,1]$ è in Y ed è compatto, esiste una sottofam. finita $f(K_{n_1}^\circ), \dots, f(K_{n_m}^\circ)$ tale che

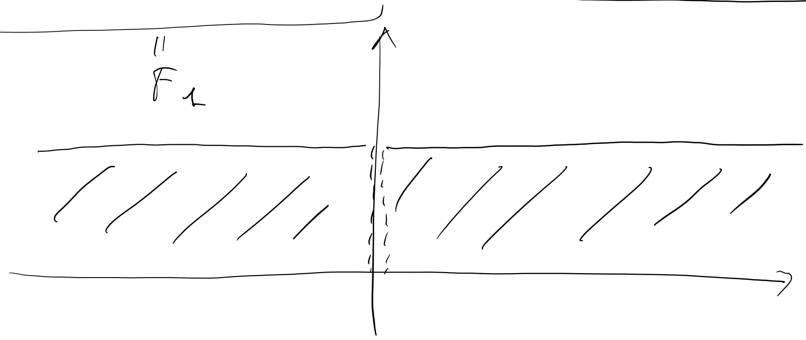
$$\{0\} \times [0,1] \subseteq f(K_{n_1}^\circ) \cup \dots \cup f(K_{n_m}^\circ)$$

e allora basta prendere $N = \max\{n_1, \dots, n_m\}$.

2) Si dm facilmente che $X \setminus K_n$ è connesso per archi, quindi è connesso.

3) $Y \setminus f(K_N)$ è sconnesso perché non interseca $\{0\} \times [0,1]$, quindi è contenuto nell'unione disgiunta

$$\underbrace{\left(]-\infty, 0[\times [0,1]\right)}_{= F_1} \cup \underbrace{\left(]0, +\infty[\times [0,1]\right)}_{= F_2} = F$$



Se per assurdo $Y \setminus f(K_N)$ fosse connesso, allora sarebbe contenuto in F_1 opp. F_2, perché sono aperti e chiusi in F.
Ma allora $f(K_N)$ non potrebbe essere limitato, ed è assurdo perché $f(K_N)$ è compatto.

4) $f|_{X \setminus K_N} : X \setminus K_N \longrightarrow Y \setminus f(K_N)$ sarebbe un omeom., contraddicendo 2) e 3).

Es. 10: 1) $\bigcap_{A\in\mathcal{R}} A^c = \bigcap_{A\in\mathcal{R}} (P \setminus A) =$

$= P \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{R}} A \right) = P \setminus P = \emptyset.$

Se per assurdo avessimo $A_1^c \cap \ldots \cap A_m^c = \emptyset$,

allora $P = P \setminus (A_1^c \cap \ldots \cap A_m^c) = (P \setminus A_1^c) \cup \ldots \cup (P \setminus A_m^c) =$

$= A_1 \cup \ldots \cup A_m$

cioè avremmo trovato un s.ric. finito: assurdo.

2) Osserviamo che P è non vuoto, perché non compatto.
Allora $\mathcal{R}$ è non vuoto, prendiamo un $A \in \mathcal{R}$, e osserviamo che P stesso e $A^c \cup \{\infty\}$ sono elem. di $\mathcal{R}$, quindi di $\mathcal{S}$, quindi di $\mathcal{B}$. Ma

$$Q = P \cup (A^c \cup \{\infty\})$$

perciò abb. scritto Q come unione di elem. di $\mathcal{B}$.

Siano ora $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$, cioè entrambi sono di un numero finito di elem. di $\mathcal{B}$. Allora anche $E_1 \cap E_2$ è in $\mathcal{S}$, perché è anch'esso intersez. di un numero finito di elem. di $\mathcal{B}$.

Segue: $\mathcal{B}$ è base di una qualche topologia su Q.

3) $q(\overline{D})$ è chiuso perché $\overline{D}$ è chiuso e q è chiusa. Inoltre D contiene le coppie (x,x) $\forall x \in P$, perciò $q(\overline{D})$ già esso contiene P.

4) Supp. per assurdo che $\{\infty\}$ sia aperto in Q, scriviamolo come unione di elem. di $\mathcal{B}$: possiamo usare solo $\emptyset$ e $\{\infty\}$, quindi $\{\infty\} \in \mathcal{B}$. Cioè $\{\infty\}$ è intersez. finita di elem. di $\mathcal{S}$. Gli unici elem. di $\mathcal{S}$ che contengono ∞ sono del tipo $A^c \cup \{\infty\}$ per qualche $A \in \mathcal{R}$, dunque esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ t.c. $\{\infty\} = (A_1^c \cup \{\infty\}) \cap \dots \cap (A_n^c \cup \{\infty\})$. Segue $A_1^c \cap \dots \cap A_n^c = \emptyset$, perché nessun A_i^c contiene ∞. Questo contraddice 1), quindi $\{\infty\}$ non è aperto in Q.

5) Visto che $\{\infty\}$ non è aperto in Q, il suo complementare $P = Q \setminus \{\infty\}$ non è chiuso in Q, quindi la sua chiusura contiene strettamente P. Cioè $\overline{P}$ contiene anche ∞, cioè P è denso in Q. Allora anche $q(\overline{D})$ è denso in Q, ed essendo chiuso deve

coincidere con tutto Q. Allora $q(\overline{D}) \ni \infty$.

Di conseguenza $\overline{D}$ deve contenere punti che si proiettano su ∞ tramite q, cioè punti del tipo (x, ∞) per qualche $x \in P$.

6) Sia U intorno di x in P e $A \in R$, allora $A^c \cup \{\infty\}$ è un aperto in Q cont. ∞, quindi è un intorno di ∞ in Q. Il prodotto $U \times (A^c \cup \{\infty\})$ allora è un intorno di (x, ∞) in $P \times Q$, perciò interseca D.

7) Supp. per assurdo $x \notin A^c$ per un $A \in R$, allora A è un intorno di x in P. Per 6), il prodotto $A \times (A^c \cup \{\infty\})$ interseca D, cioè $\exists y \in P \mid (y, y) \in A \times (A^c \cup \{\infty\})$, cioè $y \in A$ e $y \in A^c$: assurdo.