Es. 1: Sappiamo che

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \subseteq P,\ V \subseteq Q \text{ aperti}\}$$

è una base della top. prodotto su $P \times Q$, quindi ogni aperto di $P \times Q$ si può scrivere come unione di elem. di $\mathcal{B}$.

Dimostriamo che ogni elem. di $\mathcal{B}$ si può scrivere come unione di elem. di

$$\mathcal{B}' = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}_P,\ V \in \mathcal{B}_Q\}$$

Sia $U \times V \in \mathcal{B}$, scriviamo U e V come unioni

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i, \qquad V = \bigcup_{j \in J} V_j$$

dove $U_i \in \mathcal{B}_P\ \forall i$, $V_j \in \mathcal{B}_Q\ \forall j$. Allora

$$U \times V = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} V_j\right) =$$

$$= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \underbrace{(U_i \times V_j)}_{\in \mathcal{B}'}$$

Segue che ogni aperto di $P \times Q$ si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}'$.

Es. 2: 1) Sì: una base della top. prodotto è, nel nostro caso:

$$\mathcal{B} = \{ U \times V \mid U \in \{\emptyset, P\},\ V \in \{\emptyset, Q\} \} =$$

$$= \{ \underbrace{\emptyset \times \emptyset}, \underbrace{\emptyset \times Q}, \underbrace{P \times \emptyset}, P \times Q \} = \{\emptyset, P \times Q\}$$

$$= \emptyset$$

e unendo elem. di $\mathcal{B}$ ottengo solo $\emptyset$ e $P \times Q$.

2) Sì, perché dati $x \in P$, $y \in Q$ l'insieme $\{(p,q)\}$ è aperto. Questo perché $\{(p,q)\} = \underbrace{\{p\}}_{\text{aperto in } P} \times \underbrace{\{q\}}_{\text{aperto in } Q}$

<u>Es. 3:</u> Sia $C \subsetneq P \times Q$ chiuso, allora

$$(P \times Q) \setminus C$$

è aperto, quindi si può scrivere come unione di aperti della base solita:

$$(P \times Q) \setminus C = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$$

dove $U_i \subseteq P$, $V_i \subseteq Q$ sono aperti. L'unione non è vuota perché $C \neq P \times Q$, inoltre possiamo supporre $U_i, V_i \neq \emptyset$ $\forall i$.
Abbi:

$$C = \bigcap_{i \in I} (P \times Q) \setminus (U_i \times V_i)$$

Ora: $(P\times Q)\setminus(U_i\times V_i)=\{(x,y)\in P\times Q \mid (x,y)\notin U_i\times V_i\}=$

$=\{(x,y)\in P\times Q \mid x\notin U_i \text{ opp. } y\notin V_i\}=$

$=\Big(\big((P\setminus U_i)\times Q\big)\cup\big(P\times(Q\setminus V_i)\big)\Big)$

Quindi

$$C=\bigcap_{i\in I}\Big(\big((P\setminus U_i)\times Q\big)\cup\big(P\times(Q\setminus V_i)\big)\Big)$$

Osserviamo che $P\setminus U_i$ e $Q\setminus V_i$ sono insiemi finiti, perché U_i e V_i sono non vuoti. Chiamiamo $C_i:=\big((P\setminus U_i)\times Q\big)\cup\big(P\times(Q\setminus V_i)\big)$.

Fissiamo $i_0\in I$ e poniamo $F=Q\setminus V_{i_0}$; abbiamo

$$C_{i_0}\setminus(P\times F)\subseteq (P\setminus U_{i_0})\times Q$$

da cui $p\big(C_i\setminus(P\times F)\big)\subseteq p\big((P\setminus U_{i_0})\times Q\big)=P\setminus U_{i_0}$

che è un insieme finito. Ora basta osservare che

$$p\big(C\setminus(P\times F)\big)\subseteq p\big(C_{i_0}\setminus(P\times F)\big).$$

Dimostriamo che la topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$ non è la topologia prodotto su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dove su ciascuna copia di $\mathbb{R}$ mettiamo la top. di Zariski. Sappiamo che la top. di Zariski su $\mathbb{R}$ è la top. cofinita. Ora, consid. $C=\Delta=\{(x_1,x_1)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\in\mathbb{R}\}$.

E' un chiuso di Zariski, perché è il luogo degli zeri del polinomio $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ dato da $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

Ma non esiste un sottoinsieme finito $F \subseteq \mathbb{R}$ tale che la proiezione di $C \setminus (\mathbb{R} \times F)$ è un insieme finito. Quindi C non è chiuso in topologia prodotto.

Es. 4: Sia $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$, sia $C \subseteq P \times Q$ chiuso.

L'intersezione $C \cap (P \times \{q_i\})$ è chiusa in $P \times \{q_i\}$ $\forall i$, quindi la proiezione $p(C \cap (P \times \{q_i\}))$ è chiusa in P $\forall i$.

Infine

$$p(C) = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} C \cap (P \times \{q_i\})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} p(C \cap (P \times \{q_i\}))$$

quindi $p(C)$ è chiuso in P.

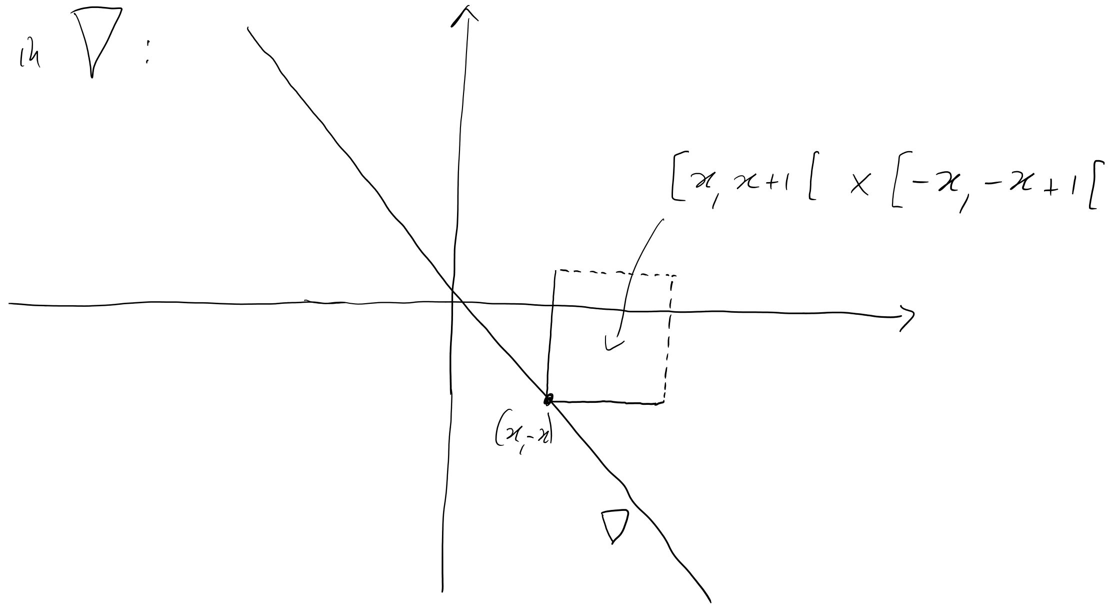
Es. 5: Basta osservare che i "rettangoli semiaperti"

$$[a, b[\times [c, d[$$

sono aperti in topologia prodotto, ponendo sui fattori $\mathbb{R}$ la top. di Sorgenfrey. Allora $\forall p = (x, -x) \in \nabla$ abbiamo:

$\{p\} = \nabla \cap ([x, x+1[\times [-x, -x+1[)$

è aperto in ∇:



<u>Es. 6</u>: Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, possiamo supporre $x < y$. Allora

$$x \in \left[x, \tfrac{x+y}{2}\right[\text{ aperto}, \qquad y \in [y, y+1[\text{ aperto}$$

disgiunti

quindi $\mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey è T2.

<u>Es. 7</u>: $\mathbb{R}$ con questa topologia non è di Hausdorff, infatti ad es. ogni aperto contenente $\frac{1}{2}$ contiene anche l'intervallo $]0,1[$, perché non ci sono elementi della base che contengono $\frac{1}{2}$ ma non $]0,1[$. Quindi non esistono intorni disgiunti ad es. di $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ rispettivamente.

<u>Es. 8</u>: (1) Sia $p = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, allora $\{p\}$ è l'intersezione dei luoghi degli zeri dei polinomi $x - a_1, x - a_2, \dots, x - a_n$, quindi $\{p\}$ è chiuso.

(2) Se K è finito allora K^n ha solo un numero finito di punti, che sono tutti chiusi per il punto (1), quindi tutti i sottoinsiemi di

K^n sono chiusi, quindi K^n ha top. discreta che è sempre T2.

(3) <u>Con $n=1$:</u> abbiamo visto che la top. di Zariski su $K=K^1$ è la topologia cofinita, che non è T2.

<u>Con $n>1$:</u> L'applicazione $\varphi : K \to K^n$, $a \longmapsto (a,0,..,0)$ è un'immersione topologica, verifichiamolo. Intanto è iniettiva; poi sia $A \subseteq K^n$ aperto, allora esistono polinomi $f_i \in K[x_1,..,x_n]$ per $i \in I$ tali che

$$A = \bigcup_{i\in I} (K^n)_{f_i}$$

Allora $\varphi^{-1}(A) = \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}((K^n)_{f_i})$. Inoltre

$$\varphi^{-1}((K^n)_{f_i}) = \{ a \in K \mid f_i(a,0,..,0) \neq 0 \}$$

è uguale a $K_{\tilde{f}_i} = \{ a \in K \mid \tilde{f}_i(a) = 0 \}$ dove $\tilde{f}_i \in K[x]$ è il polinomio in una variabile $\tilde{f}_i(x) = f_i(x,0,..,0)$.

Segue: $\varphi^{-1}(A)$ è aperto in K, quindi φ è continua.

Sia ora $B \subseteq K$ aperto, quindi esistono polinomi $g_j \in K[x]$ per $j \in J$ tali che

$$B = \bigcup_{j \in J} K_{g_j}$$

Poniamo $\overline{g}_j(x_1,..,x_n) = g_j(x_1)$, come polinomio in n variabili, e consid.

$$D = \bigcup_{j\in J} (K^n)_{\overline{g}_j},$$ aperto in K^n.

Vale $\varphi^{-1}(D) = \bigcup_{j \in J} \varphi^{-1}((K^n)_{\bar{g}_j})$

ma $\varphi^{-1}((K^n)_{\bar{g}_j}) = \{a \in K \mid \underbrace{\bar{g}_j(a,0,\dots,0)}_{= g_j(a)} \neq 0\} = K_{g_j}$

quindi $\varphi^{-1}(D) = B$ per cui φ è un'immersione.

Allora l'immagine di φ è omeomorfa a $K = K^1$ che non è T2, ma quest'immagine è un sottospazio di K^n, che quindi non può essere T2.

<u>ES. 9:</u> Per ogni $i,j \in \{1,\dots,n\}$ con $i \neq j$ scegliamo intorni aperti U_{ij} di x_i e U_{ji} di x_j tali che $U_{ij} \cap U_{ji} = \emptyset$. Per ogni i poniamo

$$U_i = \bigcap_{k \neq i} U_{ik}$$

che è un aperto contenente x_i, e per $i \neq j$ vale

$$U_i \cap U_j \subseteq U_{ij} \cap U_{ji} = \emptyset$$

quindi $U_i \cap U_j = \emptyset$.

<u>ES. 10:</u> Sappiamo che $B = \{p \in X \mid f(p) = g(p)\}$ è chiuso in X, d'altronde contiene A che è denso, per cui $B = X$.

<u>ES. 11:</u> Siano $p, q \in X$ con $p < q$. Sappiamo che esiste almeno un numero irrazionale $\xi \in]p,q[$, quindi possiamo scrivere X come unione disgiunta di due aperti non vuoti:

$$X = \left(]-\infty, \xi[\cap X\right) \cup \left(X \cap]\xi, +\infty[\right)$$

contiene p contiene q

Es. 12: (1) segue da (2)

(2) Siano $p, q \in Y$ con $p < q$, allora ricordiamo che $]-\infty, q[$ e $[q, +\infty[$ sono aperti in X.

Quindi possiamo scrivere Y come unione disgiunta di due aperti non vuoti:

$$Y = \left(]-\infty, q[\cap Y\right) \cup \left(Y \cap [q, +\infty[\right)$$

contiene p contiene q

Es. 13: (1) Sia $f: X \to Y$ un omeomorfismo, e sia $y = f(x)$.

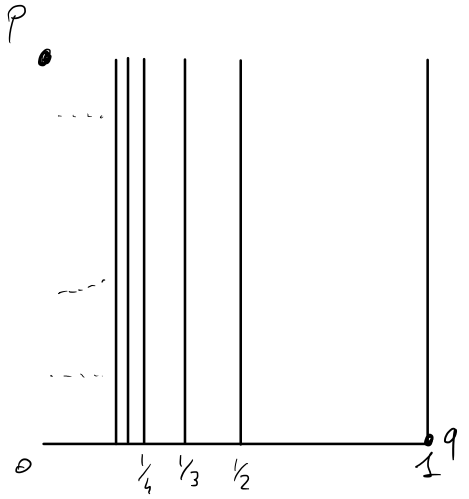
Allora $f|_{X \setminus \{x\}}: X \setminus \{x\} \longrightarrow Y \setminus \{y\}$ è biiettiva e continua per quanto già visto (restrizioni su dominio e codominio di appl. continue sono continue). Per lo stesso motivo l'inversa è continua, quindi $X \setminus \{x\}$ e $Y \setminus \{y\}$ sono omeomorfi.

(2) Sia $x = 0 \in [0,1[= X$, allora $X \setminus \{x\} =]0,1[$ è connesso. Ma $\forall y \in Y =]0,1[$ vale $Y \setminus \{y\} =]0,y[\cup]y,1[$ è sconnesso. Quindi non esiste alcun $y \in Y$ tale che $X \setminus \{x\}$ e $Y \setminus \{y\}$ sono omeomorfi. Per la parte (1), X e Y qui non possono essere omeomorfi.

Es. 14: Sia per assurdo $\alpha: [0,1] \longrightarrow X$ = pettine con la pulce un cammino da $p=(0,1)$ a $q=(1,0)$. Consideriamo

$$A = X \cap (\mathbb{R} \times]0,+\infty[) \quad (= \text{pulce} + \text{denti del pettine})$$

aperto in X. Vale $\alpha^{-1}(A)$ è aperto in $[0,1]$, ed è un aperto proprio di $[0,1]$ perché $\alpha(1) = q \notin A$. Il complementare $B = [0,1] \setminus \alpha^{-1}(A)$ è un chiuso non vuoto in $[0,1]$, sono i valori del param. t tali che $\alpha(t)$ è sulla base del pettine.



Consid. $b = \inf B \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ è chiuso} \\ \text{e limitato}}}{=} \min B$, è il primo valore del param. t tale che $\alpha(t)$ è sulla base del pettine. Allora $\alpha(b) \in [0,1] \times \{0\}$, mentre $\alpha([0,b[) \subseteq A$, inoltre $\alpha([0,b[)$ è connesso. La proiezione di A sulla prima coordinata è l'insieme $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\} = D$, la proiezione di $\alpha([0,b[)$ è connessa, contiene 0, ed è contenuta in D, quindi la proiezione di $\alpha([0,b[)$ è $\{0\}$.

L'unico punto di A che si proietta su zero è la pulce $(0,1)$, quindi $\alpha([0,b[) = \{(0,1)\}$, e invece $\alpha(b) \in [0,1] \times \{0\}$, quindi

α non può essere continua in b: assurdo.

Es. 15: 1) Sia $A \subseteq X$ aperto e chiuso. Sappiamo che $Y \subseteq A$ opp. $A \cap Y = \emptyset$, e $Z \subseteq A$ opp. $A \cap Z = \emptyset$ perché Y e Z sono connessi. Se $Y \subseteq A$ allora A interseca anche Z, quindi $X = Y \cup Z \subseteq A$ cioè $X = A$.

Se $Y \cap A = \emptyset$ allora Y non può contenere Z, quindi $Y \cap Z = \emptyset$ e vale $A = \emptyset$ perché $X = Y \cup Z$.

2) Siano $p, q \in X$. Se p e q sono entrambi in Y o entrambi in Z allora sappiamo già che esiste un cammino da p a q.

Supp. allora p e q siano uno in Y e uno in Z, e scegliamo $r \in Y \cap Z$. Esistono cammini α da p a r e β da r a q, quindi il cammino

$$\begin{aligned} \gamma: [0,1] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 0] \end{cases} \end{aligned}$$

percorre tutto α per t da 0 a $\frac{1}{2}$, poi tutto β per t da $\frac{1}{2}$ a 1.

Quindi γ è continuo e va da p a q.