Es. 1: Se f è continua allora $f^{-1}(A)$ è aperto $\forall A \in \mathcal{B}$.

Viceversa, supp. $f^{-1}(A)$ aperto $\forall A \in \mathcal{B}$, e sia $D \subseteq Y$ aperto qualsiasi. Scriviamolo come unione di aperti $A_i \in \mathcal{B}$ per $i \in I$:

$$D = \bigcup_{i \in I} A_i \quad , \quad \text{allora} \quad f^{-1}(D) = \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(A_i)}_{\text{aperto } \forall i}$$

da cui $f^{-1}(D)$ è aperto, quindi f è continua.

Es. 2: 1) f aperta $\iff$ $f(B)$ aperto $\forall B \subseteq X$ aperto $\iff$

$(f^{-1})^{-1}(B)$ aperto $\forall B \subseteq X$ aperto $\iff$ f^{-1} continua

2) f omeom. $\iff$ f continua e f^{-1} continua $\underset{\text{per } 1)}{\iff}$ f continua e aperta

3) Se f è biiettiva allora f aperta $\iff$ f chiusa, perché se f è aperta, dato $C \subseteq X$ chiuso vale

$$f(C) = Y \setminus \underbrace{f(X \setminus C)}_{\text{aperto}} \quad \text{è chiuso,}$$

e analogam. se f è aperta è anche chiusa. Quindi 3) segue da 2).

Es. 3: Sia $A \subseteq Y$ aperto. Se $A \ni p$ allora $f^{-1}(A) = X$ è aperto.

Se $A \not\ni p$ allora $f^{-1}(A) = \emptyset$, aperto. Quindi f è continua.

Es. 4: Verifichiamo la continuità su un ap. della base

$$\{ Y_g \mid g \in \mathbb{R}[x] \}$$

dove $Y = \mathbb{R}$, $Y_g = \{ x \mid g(x) \neq 0 \}$.

Vale $f^{-1}(Y_g) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) \in Y_g \} =$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid g(f(x_1, x_2)) \neq 0 \} = X_{g \circ f}$

dove $X = \mathbb{R}^n$, e $X_{g\circ f} = \{ (x_1, x_2) \mid (g \circ f)(x_1, x_2) \}$ è un elem. della base della top. di Zariski su $\mathbb{R}^2$. Quindi f è continua.

Es. 5: Verifichiamo la continuità con i chiusi: $\pi^{-1}(C)$ dev'essere chiuso $\forall C \subseteq Y$ chiuso, cioè $C = \mathbb{R}$ opp. C è un insieme finito.

Allora $\pi^{-1}(C) = C \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$; se $C = \mathbb{R}$ allora $\pi^{-1}(C) = \mathbb{R}^2 = X$ è aperto in X per qualsiasi topologia, quindi andrà fatta la verifica solo per C finito (non vuoto, perché anche $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ è sempre aperto).

(1) Se $X = \mathbb{R}^2$ ha top. cofinita, dato C finito non vuoto la sua controimmagine $C \times \mathbb{R}$ è un sottoinsieme proprio e infinito di $\mathbb{R}^2$, e allora non è chiuso. Segue: π non è continua.

(2) È facile dim. che $\mathbb{R}^2 \setminus (C \times \mathbb{R})$ è aperto in top. euclidea, per cui π è continua se X ha top. euclidea.

(3) Sia $C = \{p_1, \dots, p_n\}$, allora $\pi^{-1}(C) = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in \{p_1, \dots, p_n\} \}$

$= V(f)$ dove $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ è il polinomio

$f(x_1, x_2) = (x_1 - p_1) \cdot \ldots \cdot (x_n - p_n)$.

Segue: $\pi^{-1}(C)$ chiuso e π continua.

Es. 7: Falso, ad es. l'appl. dell'esercizio 3 è continua anche se Y non ha top. banale.

Es. 8: (1) $A = B_\varepsilon(p)$, $D = B_\varepsilon(q)$ con $\varepsilon = \dfrac{d(p,q)}{2}$.

Gli insiemi A e D sono aperti e disgiunti.

(2) Se fosse metrizzabile, per la parte (1) esisterebbero intorni disgiunti rispettivi di due punti distinti qualsiasi, il che è falso se X ha topologia banale.

Es. 9: (1) Sia q aderente a $C_\varepsilon(p)$, quindi $\forall \delta > 0\ \exists x \in C_\varepsilon(p) \mid d(x,q) < \delta$. Stimiamo la distanza da p a q:

$$d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) \leq \varepsilon + \delta \qquad \forall \delta > 0$$

Segue: $d(p,q) \leq \varepsilon$, cioè $q \in C_\varepsilon(p)$, che allora è chiuso.

(2) La topologia è discreta quindi tutti i sottoins. sono aperti e chiusi, perciò

$$\overline{B_1(p)} = B_1(p) = \{p\}$$

perché tutti gli altri punti sono a distanza ≥ 1 da p

D'altronde $C_1(p) = X$ perché tutti i punti sono a distanza ≤ 1 l'uno dall'altro. Segue:

$$C_1(p) \neq \overline{B_1(p)}.$$

Es. 10: (1) Verifichiamo gli assiomi di distanza:

1) $\bar{d}(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$, e $\bar{d}(x,y)=0 \iff x=y$: OVVIO

2) $\bar{d}(x,y)=\bar{d}(y,x) \quad \forall x,y \in X$: OVVIO

3) $\bar{d}(x,y)+\bar{d}(y,z) \overset{?}{\geq} \bar{d}(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$

Verifica:

a) Se $d(x,y), d(x,z), d(y,z) < 1$ allora la dis. triangolare per $\bar{d}$ è la stessa che per d, quindi vale.

b) Supp. $d(x,y) \geq 1$, allora la dis. triang. per $\bar{d}$ diventa

$1+\bar{d}(y,z) \geq \bar{d}(x,z)$ che è sempre vera perché $\bar{d}$ non assume mai valori >1.

Analogam. vale se supp. $d(y,z) \geq 1$.

c) Supp. $d(x,z) \geq 1$, allora la dis. triang. per d implica $d(x,y) \geq 1$ opp. $d(y,z) \geq 1$, e ci riportiamo al caso b).

(2) Osserviamo che $\bar{d}(x,y) \leq d(x,y) \ \forall x,y$, per cui

$$B_\varepsilon^{\bar{d}}(p)=\{x \in X \mid \underline{\bar{d}(p,x)<\varepsilon}\} \supseteq \{x \in X \mid d(p,x)<\varepsilon\} = B_\varepsilon^{d}(p)$$

$$\Uparrow$$

$$(\bar{d}(p,x) \leq) \ d(p,x) < \varepsilon$$

(3) Se $d(x,y)<1$ allora $\bar{d}(x,y)=d(x,y)$, e se $\varepsilon<1$ allora $d(p,x)<1 \quad \forall x \in B_\varepsilon^{d}(p)$, da cui

se $\varepsilon < 1$ allora $B^{\bar{d}}_\varepsilon(p) = B^d_\varepsilon(p)$, da cui $\underset{\overset{(\shortparallel)}{\varepsilon}}{B^{\bar{d}}_\delta}(p) \subseteq B^d_\varepsilon(p)$.

Supp. invece $\varepsilon \geq 1$, e poniamo $\delta = \frac{1}{2}$.

Abb.: $\forall x \in B^{\bar{d}}_\delta(p)$: $\bar{d}(p,x) < \frac{1}{2} < 1$, quindi per ogni tale x abb. $\bar{d}(p,x) = d(p,x)$, da cui $d(p,x) < \frac{1}{2} < \varepsilon$.

Ma allora $x \in B^d_\varepsilon(p)$, da cui $B^{\bar{d}}_\delta(p) \subseteq B^d_\varepsilon(p)$.

(4) Segue da un corollario visto a lezione (l'ultimo sugli spazi metrici).

Es. 11: (1) Verifichiamo gli assiomi di distanza:

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$, e $d(x,y) = 0 \iff x = y$: OVVIO

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$: OVVIO

3) Da dim.: $d(x,y) + d(y,z) \overset{(?)}{\geq} d(x,z) \quad \forall x,y,z \in X$

Se $x = y$ opp. $y = z$ allora la dis. triangolare è ovvia, e anche se $x = z$. Supp. allora x, y, z tutti diversi, e scriviamo $x - y = p^s \frac{a}{b}$, $y - z = p^t \frac{c}{d}$

con $s, a, b, t, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, e a,b,c,d non divis. per p, per cui $d(x,y) = p^{-s}$, $d(y,z) = p^{-t}$. Calcoliamo $d(x,z)$:

$$x - z = (x-y) + (y-z) = p^s \frac{a}{b} + p^t \frac{c}{d} = \dots$$

Possiamo supporre $s \geq t$, altrimenti scambiamo x con z.

Allora
$$\dots = p^t\left(\frac{a}{b} + p^{s-t}\frac{c}{d}\right) = p^t\left(\frac{ad + p^{s-t}bc}{bd}\right).$$

Sappiamo che ad e bd non sono divisibili per p. Allora se $s > t$ non può essere divisibile per p neppure il numeratore $ad + p^{s-t}bc$, quindi abbiamo scritto $x - z$ nel modo giusto per calcolare la distanza $d(x,z)$, e vale

$$d(x,z) = p^{-t} = d(y,z)$$

da cui $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ è vera.

Supp. invece $s = t$, allora il numeratore $ad + bc$ potrebbe essere divisibile per p (ma non il denominatore bd). Quindi si possono mettere eventualm. in evidenza potenze di p nell'espressione di $x - z$. Segue che $x - z$ si può scrivere come

$$x - z = p^{\tilde{t}}\,\frac{r}{bd}$$

con r non divisibile per p, e $\tilde{t} \geq t$. Allora

$$d(x,y) = p^{-t} = d(y,z), \qquad d(x,z) = p^{-\tilde{t}}$$

Da cui
$$d(x,y) + d(y,z) = 2p^{-t} \geq 2p^{-\tilde{t}} > p^{-\tilde{t}} = d(x,z)$$

quindi vale la disuguaglianza triang. anche in questo caso.

(2) Sia $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $|p^{-N}| < \varepsilon$. Allora $\forall n \geq N$, $n \in \mathbb{Z}$ vale

$|p^{-n}| < \varepsilon$, quindi basta prendere $y = x + p^n$ e abb.

$d(x,y) = |p^{-n}| < \varepsilon$.

(3) Dati $n \geq m$ abb. $p^n - p^m = p^m (\underbrace{p^{n-m} - 1}_{\text{non divisibile per } p})$, da cui

$d(p^n, p^m) = |p^{-m}|$

quindi, fissato $\varepsilon > 0$, se n e m sono abb. grandi vale

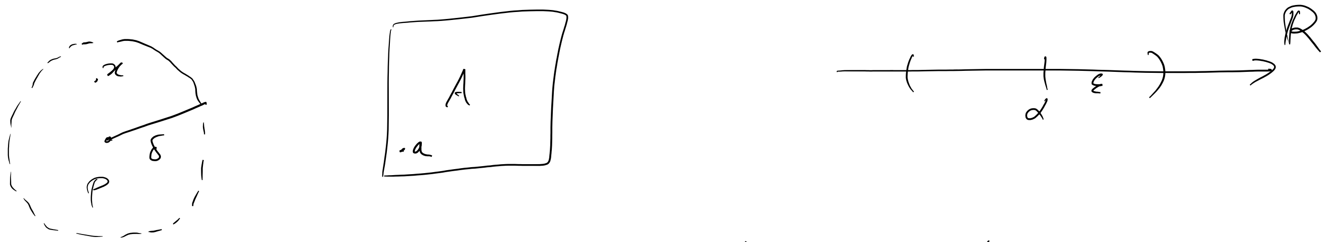
$d(p^n, p^m) < \varepsilon$.

<u>Es. 12:</u> Verifichiamo la continuità con la definizione: sia $D \subseteq \mathbb{R}$ aperto

poniamo
$$f: X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (f = d(-, A))$$
$$x \longmapsto d(x, A)$$

e dimostriamo che $f^{-1}(D)$ è aperto. Sia

$p \in f^{-1}(D)$, allora $\alpha = d(x, A) \in D$. Visto che D è aperto in $\mathbb{R}$ (sottointeso: in topologia euclidea) esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $B_\varepsilon(\alpha) \subseteq D$



Stimiamo $f(x)$ per un x a distanza $< \delta$ da p:

$f(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$, ma $d(x,a) \leq d(x,p) + d(p,a) < \delta + \alpha$.

Inoltre $\underset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{d(p,a)}} \leq \underbrace{d(p,x)}_{<\delta} + d(x,a)$

da cui $\quad \alpha - \delta < \alpha - d(p,x) \leq d(x,a)$. Concludiamo che

$$\alpha - \delta < d(x,a) < \alpha + \delta$$

Quindi se fissiamo $\delta < \varepsilon$, abbiamo che $f(x) \in B_\varepsilon(\alpha)$, da cui $f(x) \in D$, cioè $x \in f^{-1}(D)$. In altre parole abb. dim. che esiste $\delta > 0$ t.c. $B_\delta(x)$ è cont. in $f^{-1}(D)$, da cui $f^{-1}(D)$ è aperto. Allora f è continua.

$\square$

Es. 13: $\Rightarrow$) Se C è chiuso in Y allora $A = Y \setminus C$ è aperto in Y, cioè esiste $B \subseteq X$ aperto in X t.c. $A = B \cap Y$, consid. $D = X \setminus B$ che è chiuso in X, vale

$$D \cap Y = (X \setminus B) \cap Y = Y \setminus B = Y \setminus (Y \cap B) = Y \cap A = C$$

$\Leftarrow$) Sia $C \subseteq Y$ tale che esiste $D \subseteq X$ chiuso in X con $C = X \cap D$, consid. $B = X \setminus D$ che è ap. in X e $A = Y \cap B$ che è aperto in Y. Vale

$$Y \setminus C = Y \setminus (X \cap D) = Y \setminus D = Y \cap (X \setminus D) = Y \cap B = A$$

da cui C è chiuso in Y.

ES. 14: Sia $A \subseteq Y$ aperto in Y, quindi esiste $D \subseteq X$ aperto in X t.c. $A = Y \cap D$. Scriviamo D come unione di elem. di $\mathcal{B}$:

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i \quad , \quad D_i \in \mathcal{B} \ \forall i,$$

allora

$$A = Y \cap D = Y \cap \left(\bigcup_{i \in I} D_i \right) = \bigcup_{i \in I} (Y \cap D_i)$$

e $Y \cap D_i \in \mathcal{B}'$ $\forall i$, quindi $\mathcal{B}'$ è una base di Y.

ES. 15: (1) $[0,1[\ = \ ]-1,1[\cap Y = [-1,1] \cap Y$ quindi $[0,1[$ è aperto e chiuso in Y.

(2) $]2,3] =]2,4[\cap Y$ quindi $]2,3]$ è aperto in Y, ma non è chiuso in Y perché se esistesse $D \subseteq \mathbb{R}$ chiuso tale che $D \cap Y =]2,3]$ allora 2 sarebbe aderente a D, quindi avrei $2 \in D$, e anche $2 \in D \cap Y$: falso.

(3) $C = [\frac{1}{2}, 1[\cup \{2\} = \underbrace{([\frac{1}{2}, 1] \cup \{2\})}_{\text{chiuso in } \mathbb{R}} \cap Y$ quindi C è chiuso in Y. Però non è aperto, perché se avessi $B \subseteq X$ aperto t.c. $C = Y \cap B$ allora B conterrebbe un intervallo

$]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$ con $0 < \varepsilon < 1$, e allora C conterrebbe l'intervallo $[2, 2+\varepsilon[$: falso.

Es. 16: Sia $A \subseteq Y$, consid. $(f|_Z)^{-1}(A) = \{z \in Z \mid f(z) \in A\}$

è uguale a $\{z \in X \mid z \in Z \text{ e } f(z) \in A\} = Z \cap f^{-1}(A)$

che è aperto in Z perché $f^{-1}(A)$ è aperto in X.

Es. 17: Y non ha topologia discreta, perché $\{0\}$ non è aperto in Y.

Infatti, se per assurdo $A = \{0\}$ fosse ap. in Y esisterebbe $B \subseteq X$ aperto in X t.c. $A = Y \cap B$, ma B conterrebbe un intervallo del tipo $]-\varepsilon, \varepsilon[$ per un $\varepsilon > 0$, che contiene sicuramente anche punti di Y del tipo $\frac{1}{n}$ per n abbastanza grande.