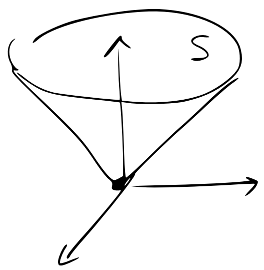
Es. 1: $S = \{ (x,y,z) \mid z = \sqrt{x^2+y^2} \}$



S non è una superficie diff. immersa in $\mathbb{R}^3$,

il problema è nell'origine. Ma dire semplicemente: S è definita implicitamente come $f=0$ dove f non è C^∞ nell'origine, non è una dimostrazione!

Usiamo invece il fatto che ogni punto deve avere una carta locale di Monge.

In questo caso, se S fosse una sup differenziabile, allora anche l'origine avrebbe una carta locale di Monge, cioè sarebbe del tipo $(u, v, g(u,v))$ opp. $(u, g(u,v), v)$ oppure $(g(u,v), u, v)$.

Il secondo e il terzo tipo non sono possibili, perché la proiez. sulla y e la proiez. sulla z non sono iniettive in alcun intorno di $(0,0,0)$ in S, quindi l'unica possibilità sarebbe $(u, v, g(u,v))$ e l'unica possibilità per g sarebbe $g(u,v) = \sqrt{u^2+v^2}$, che però non è C^∞.

Es. 2: $\varphi(u,v) = (v\cos(u), v\sin(u), \mu u)$

$X_u = (-v\sin(u), v\cos(u), \mu)$

$X_v = (\cos(u), \sin(u), 0)$

$E = X_u \cdot X_u = v^2\sin^2(u) + v^2\cos^2(u) + \mu^2$
$= v^2 + \mu^2$

$F = X_u \cdot X_v = -v\cancel{\sin(u)\cos(u)} + v\cancel{\cos(u)\sin(u)}$
$= 0$

$G = X_v \cdot X_v = \cos^2(u) + \sin^2(u) = 1$

$$X_u \wedge X_v = \left(0 - \mu \sin(u),\ -\left(0 - \mu \cos(u)\right),\ -v\sin^2(u) - v\cos^2(u)\right) =$$

$$= \left(-\mu \sin(u),\ \mu \cos(u),\ -v\right)$$

$$\| X_u \wedge X_v \| = \sqrt{\mu^2 \sin^2(u) + \mu^2 \cos^2(u) + v^2} = \sqrt{\mu^2 + v^2} = d \quad \left(= \sqrt{EG - F^2}\right)$$

$$N = \frac{1}{d}\left(-\mu \sin(u),\ \mu \cos(u),\ -v\right)$$

$$X_{uu} = \left(-v\cos(u),\ -v\sin(u),\ 0\right)$$

$$\mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = \frac{1}{d}\left(v\mu \sin(u)\cos(u) - \mu v \cos(u)\sin(u)\right) = 0$$

$$X_{uv} = \left(-\sin(u),\ \cos(u),\ 0\right)$$

$$\mathcal{M} = N \cdot X_{uv} = \frac{1}{d}\left(\mu \sin^2(u) + \mu \cos^2(u)\right) = \frac{\mu}{d}$$

$$X_{vv} = 0$$

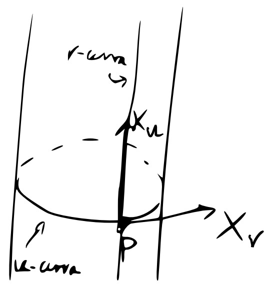
$$\mathcal{N} = N \cdot X_{vv} = 0$$

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{\mu^2}{d^2}}{d^2} = -\frac{\mu^2}{d^4}$$

Abb. K costante <0, quindi ogni punto è iperbolico.

Es. 3: Cilindro di raggio 1:

$$\psi(u,v) = \left(u,\ \cos(v),\ \sin(v)\right)$$



$$X_u = (1,\ 0,\ 0)$$

$$X_v = (0, -\sin(v), \cos(v))$$

$$E = X_u \cdot X_u = 1, \quad F = X_u \cdot X_v = 0, \quad G = X_v \cdot X_v = 1$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = \frac{(0, -\cos(v), -\sin(v))}{1} = (0, -\cos(v), -\sin(v))$$

Per calcolare II_p:

$$N_u = (0, 0, 0)$$

$$N_v = (0, \sin(v), -\cos(v))$$

$$\mathcal{L} = -N_u \cdot X_u = 0$$

$$\mathcal{M} = -N_u \cdot X_v = 0$$

$$\mathcal{N} = -N_v \cdot X_v = -\sin^2(v) - \cos^2(v) = -1$$

Allora: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$

quindi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Osserviamo: X_u e X_v sono autovettori di A, di autovalori 0 e -1.

Es. 4: $\psi(u,v) = (u, v, f(u,v))$ (nell'aperto che stiamo considerando, $\mathcal{S}$ è il grafico di f).

Calcoliamo le due forme fondamentali:

$$X_u = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right) \qquad X_v = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2, \quad F = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}, \quad G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}}$$

$$\mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\mathcal{M} = N \cdot X_{uv} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$$

$$\mathcal{N} = N \cdot X_{vv} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Otteniamo $\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot Hf$

hessiano di f

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\right)^2 \det(Hf)}{EG-F^2} = \frac{\det(Hf)}{(EG-F^2)^2}$$

Es. 5: È un caso particolare dell'esempio precedente, con

$$f(0,0)=0=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0), \quad EG-F^2=1$$

Allora $X_u(0,0)=(1,0,0)$, $X_v(0,0)=(0,1,0)$, e

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}(0,0) & m(0,0) \\ m(0,0) & n(0,0) \end{pmatrix} = Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} \\ 2b_{12} & 2b_{22} \end{pmatrix} = 2B$$

Es. 6: Supp. ogni punto ombelicale, quindi

$\forall p \in S : L_p : T_pS \to T_pS$ è omotetia,

cioè $L_p(v)=\lambda(p)v \quad \forall v \in T_pS$.

Per prima cosa dim. che $\lambda(p)=$ costante. Abb.

$$L_p(X_u) = -N_u = \lambda X_u \qquad (N_u = N_u(p),\ X_u = X_u(p),$$
$$L_p(X_v) = -N_v = \lambda X_v \qquad \lambda = \lambda(p))$$

Derivando:

$$-N_{uv} = \lambda_v X_u + \lambda X_{uv}, \quad -N_{vu} = \lambda_u X_v + \lambda X_{uv}$$

sono uguali, da cui $\lambda_v X_u + \cancel{\lambda X_{uv}} = \lambda_u X_v + \cancel{\lambda X_{uv}}$

ma X_u, X_v sono lin. dipendenti, per cui $\lambda_u = \lambda_v = 0$.

Segue: $\lambda : S \to \mathbb{R}$ è costante (il ragionam. dice che λ è localm. costante, ma in più S è connessa).

Supp. $\lambda \neq 0$ | Def $c = X - \frac{1}{\lambda} N$, e abb.

$$\frac{\partial c}{\partial u} = X_u - \frac{1}{\lambda} N_u = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial v} = X_v - \frac{1}{\lambda} N_v = 0$$

cioè c è costante. D'altronde

$$\|X - c\| = \|X - X + \frac{1}{\lambda} N\| = \|\frac{1}{\lambda} N\| = \frac{1}{|\lambda|}, \text{ cioè}$$

$\psi(u,v) = X \in \{ p \in \mathbb{R}^3 \mid \|p - c\| = \frac{1}{|\lambda|} \}$, S è cont. in una sfera.

Supp. $\lambda = 0$ | $N_u = N_v = 0 \Rightarrow N$ è costante.

Abb. $$\frac{\partial}{\partial u}(X \cdot N) = X_u \cdot N + X \cdot N_u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(X \cdot N) = 0 \text{ analogamente, cioè } X \cdot N = a = \text{costante}.$$

quindi S è contenuta nel piano affine $\{ p \in \mathbb{R}^3 \mid p \cdot N = a \}$

(il ragionam. dice che S è unione di sottoinsiemi S_i tali che $S_i \subseteq \{ p \mid p \cdot N = a_i \}$, e che S_i è aperto $\forall i$, quindi c'è un solo $S_i = S$ perché S è connessa).

Es. 7: $\|\cdot\| : S \to \mathbb{R}$ ammette massimo, quindi sia $p_0 \in S$ con $\|p_0\| \geq \|p\|$ $\forall p \in S$.

Sia $\alpha : I \to S$ curva a vel. unitaria con $\alpha(t_0) = p_0$,

def. $f : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|\alpha(t)\|^2$, allora $f'(t_0) = 0$ e $f''(t_0) \le 0$.

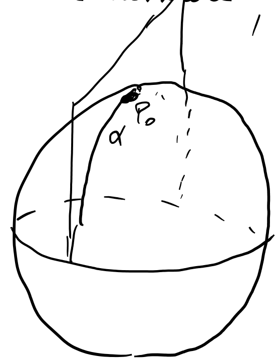
D'altronde $f'(t) = 2\alpha'(t)\alpha(t)$, $f''(t_0) = 2\big(\alpha''(t_0)\alpha(t_0) + \underbrace{\alpha'(t_0)\alpha'(t_0)}_{=1}\big)$

quindi $\alpha''(t_0)\cdot\alpha(t_0) \le -1$,

Inoltre $|\alpha''(t_0)\alpha(t_0)| = -\alpha''(t_0)\alpha(t_0) \le \|\alpha''(t_0)\|\cdot\|\alpha(t_0)\|$

e allora $\|\alpha''(t_0)\| \ge \dfrac{1}{\|\alpha(t_0)\|}$.

Possiamo supporre che α sia ottenuta come „sezione normale", cioè intersecando S con un piano normale a $T_{p_0}S$ e allora dal teo. di Meusnier deduciamo $II_{p_0}(v) > 0\ \forall v$, quindi II_{p_0} è def. positiva, e p_0 è ellittico.



<u>Spiegazione di α sezione normale</u>: dato $H \ni p_0$ piano di eq. $h(x,y,z) = 0$, visto che h è normale a $T_{p_0}S$ allora la funzione

$V \to \mathbb{R}$, $(u,v) \mapsto h(\psi(u,v))$ ha diff. non nullo* in (u_0, v_0) (con $\psi(u_0,v_0) = p_0$)

Dal teorema della f.ne implicita, la condiz. $h(\psi(u,v)) = 0$ definisce allora una curva β C^∞ intorno a (u_0, v_0), e prendiamo $\alpha = \psi \circ \beta$.

↑ in $V \subseteq \mathbb{R}^2$

($*$: Il differenziale è $\nabla h \cdot J\psi$, e non è nullo

vettore riga $\in \mathbb{R}^3$

matrice 3×2, le sue colonne sono X_u, X_v

perché ∇h è normale ad H, che non è normale ad entrambi X_u, X_v altrim. H sarebbe parallelo a $T_{p_0}S$.)