Es. 1: Possiamo supporre $t_0 = 0$, e allora lo sviluppo di Taylor di α è

$$\alpha(t) = \alpha(0) + t\,\alpha'(0) + \frac{t^2}{2}\underbrace{\alpha''(0)}_{\substack{\parallel \\ K(0)\,n(0)}} + \dots$$

e analogam. per β. Quindi, a parità di $\alpha(0)$ e $\alpha'(0)$, la curvatura in un punto determina la curva fino al secondo ordine dello sviluppo.

Es. 2:

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{r}{d}\sin\left(\frac{t}{d}\right),\ \frac{r}{d}\cos\left(\frac{t}{d}\right),\ \frac{\mu}{d}\right)$$

$$\alpha''(t) = \left(-\frac{r}{d^2}\cos\left(\frac{t}{d}\right),\ \frac{-r}{d^2}\sin\left(\frac{t}{d}\right),\ 0\right)$$

$$\kappa(t) = \|\alpha''(t)\| = \frac{r}{d}$$

$$n(t) = \frac{\alpha''(t)}{\kappa(t)} = \left(-\cos\left(\frac{t}{d}\right), -\sin\left(\frac{t}{d}\right), 0\right)$$

$$b(t) = \left(\frac{\mu}{d}\sin\left(\frac{t}{d}\right),\ -\frac{\mu}{d}\cos\left(\frac{t}{d}\right),\ \frac{r}{d}\right)$$

$$b'(t) = \left(\frac{\mu}{d^2}\cos\left(\frac{t}{d}\right),\ \frac{\mu}{d^2}\sin\left(\frac{t}{d}\right),\ 0\right) = -\tau(t)\,n(t)$$

$$\Rightarrow \tau(t) = \frac{\mu}{d^2}$$

Es. 3: Procediamo come a lezione: $\alpha(t) = (e^t \cos(t),\ e^t \sin(t),\ e^t)$

$$\alpha'(t) = \left(-e^t \sin(t) + e^t \cos(t),\ e^t \cos(t) + e^t \sin(t),\ e^t\right)$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos(t) - \sin(t))^2 + e^{2t}(\cos(t) + \sin(t))^2 + e^{2t}} =$$

$$= e^t \sqrt{2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) + 1} = e^t \sqrt{2+1} = e^t\sqrt{3}$$

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(s)\|\, ds = \int_{t_0}^{t} e^s \sqrt{3}\, ds = \sqrt{3} \int_{t_0}^{t} e^s ds = \sqrt{3}(e^t - e^{t_0})$$

Usiamo $\vartheta = \varphi^{-1}$, cioè $\varphi(t) = u = \sqrt{3}(e^t - e^{t_0})$

da cui $e^t = \frac{1}{\sqrt{3}} u + e^{t_0}$, $t = \log\left(\frac{1}{\sqrt{3}} u + e^{t_0}\right)$

$$\vartheta(u) = t = \log\left(\frac{u}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)$$

e $\beta(u) = \alpha(\vartheta(u))$ è a vel. unitaria:

$$\beta(u) = (e^t \cos(t),\ e^t \sin(t),\ e^t) =$$

$$= \left(\left(\frac{u}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\cos\left(\log\left(\frac{u}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\right),\ \left(\frac{u}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\sin\left(\log\left(\frac{u}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\right),\ \frac{u}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right).$$

Es. 4:

$\Rightarrow$] Scriviamo il piano affine come $\underbrace{\alpha(t_0)}_{\text{punto sul piano}} + \underbrace{v^\perp}_{\text{sp. vett. soggiacente}}$

dove $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Visto che $\alpha(t) \in \alpha(t_0) + v^\perp$ abb.

$\alpha(t) - \alpha(t_0) \in v^\perp$ cioè $(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot v = 0$, e derivando

otteniamo $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$ anche $\in v^\perp$. Segue che

$b(t)$ è sempre parallelo a v, cioè $b(t) = \frac{v}{\|v\|}$ oppure

$b(t) = \frac{-v}{\|v\|}$. Allora $b'(t) = 0$ e $\tau(t) = 0$ $\forall t$.

$\Leftarrow$] Supponiamo $\tau(t) = 0$, quindi $b'(t) = 0$ $\forall t$, cioè

b è costante, $b(t) = v$ fissato, $\forall t$.

Dimostriamo che $\alpha(t) \in \underbrace{\alpha(t_0) + v^\perp}_{\text{questo sarà il piano affine desiderato}}$ $\forall t$, dove $t_0 \in I$ è fissato.

Calcoliamo $(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot v = F(t)$ derivandola otteniamo

$\alpha'(t) \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{b(t)}}{v} = 0$ $\forall t$, cioè $F(t)$ è costante, e inoltre

vale 0 in $t = t_0$, quindi $F(t) = 0$ $\forall t$.

Es. 5:

$\Rightarrow$) Una circonferenza in $\mathbb{R}^3$ è contenuta in un piano affine, e per l'es. 4 sappiamo $\tau(t)=0$ $\forall t$. Abbiamo già calcolato la curvatura della circonferenza, è costante e uguale a $\frac{1}{r}$ dove r è il raggio.

$\Leftarrow$) Dall'es. 4 sappiamo che $\alpha(t) \in \alpha(t_0) + b(t_0)^{\perp}$, a posteriori il centro della circonferenza è ottenuto partendo da $\alpha(t)$ e andando in direzione $n(t)$ per una distanza uguale al raggio, che è $\frac{1}{k(t)} = \frac{1}{k(t_0)}$, cioè

$$c(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t_0)} n(t)$$

Derivando:

$$c'(t) = \alpha'(t) + \frac{1}{k(t_0)} \underbrace{n'(t)}_{\substack{\| \\ \left(-k(t)\alpha'(t) + \cancel{\tau(t)} b(t)\right)}} = \alpha'(t) - \left(\overset{\overset{1}{\|}}{\frac{k(t)}{k(t_0)}}\right)\alpha'(t) = 0$$

cioè $c(t)$ è costante, ed è a distanza $\frac{1}{k(t_0)}$ da $\alpha(t)$ $\forall t$, cioè $\alpha(t)$ è contenuta nella circonferenza di centro $c(t_0)$ e raggio $\frac{1}{k(t_0)}$ nel piano $\alpha(t_0) + b(t_0)^{\perp}$.

Es. 6: Sappiamo dalla teoria che se α e β hanno curvatura e torsione sempre uguale allora sono congruenti: esiste una matr. ortogonale $A \in O(3, \mathbb{R})$ e un vettore $c \in \mathbb{R}^3$ tali che

$$\beta(t) = A\,\alpha(t) + c \qquad \forall t \in I.$$

Inoltre sempre dalla teoria vista a lezione sappiamo:

$$A\,\alpha'(t_0) = \beta'(t_0), \qquad A\,n_\alpha(t_0) = n_\beta(t_0), \qquad A\,b_\alpha(t_0) = b_\beta(t_0)$$

ma visto che le basi di Frenet di α e β coincidono, deduciamo che A fissa una base, da cui A è la matrice identità 3×3, e allora $\beta(t) = \alpha(t) + c$ $\forall t$ (cioè α e β sono parallele).

Da $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ otteniamo $c = 0$ e $\alpha(t) = \beta(t)$ $\forall t \in I$.

Es. 7: (1) ovvio dalle formule di Frenet.

(2) $$\left({}^{tr}F(t) \cdot F(t)\right)' = {}^{tr}F'(t) \cdot F(t) + {}^{tr}F(t) \cdot F'(t) = (\dots)$$

Derivare un prodotto di matrici soddisfa la solita regola di Leibnitz (derivata di un prodotto), la verifica è molto semplice. C'è solo da stare attenti a una cosa: il prod. fra matrici non è commutativo, quindi va rispettato sempre l'ordine con cui si moltiplicano: $(A \cdot B)' = A' \cdot B + A \cdot B'$

$$(\dots) = {}^{tr}(A \cdot F) \cdot F + {}^{tr}F \cdot (A \cdot F) =$$

$$= {}^{tr}F \cdot {}^{tr}A \cdot F + {}^{tr}F \cdot A \cdot F = {}^{tr}F \underbrace{\left({}^{tr}A + A\right)}_{\nwarrow A \text{ è antisimmetrica}} F = 0$$

(3) Le entrate di $F(t) \cdot {}^{tr}F(t) = \begin{pmatrix} \boxed{\quad T \quad} \\ \boxed{\quad N \quad} \\ \boxed{\quad B \quad} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{T} & \boxed{N} & \boxed{B} \end{pmatrix}$

sono i prodotti scalari fra $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$.

Sappiamo che $(T(t_0), N(t_0), B(t_0))$ è una base ortonormale, quindi

$$F(t_0) \cdot {}^{tr}F(t_0) = \text{matrice identità } 3\times 3$$

cioè ${}^{tr}F(t_0) = F(t_0)^{-1}$, da cui vale anche ${}^{tr}F(t_0) \cdot F(t_0) =$ matr. identità, ed è costante per il punto precedente, quindi

${}^{tr}F(t) \cdot F(t)$ è la matr. identità $\forall t$.

(4) Segue subito dal punto precedente.

(5) Sappiamo che $\alpha'(t) = T(t)$ $\forall t$. Scriviamo $(T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha)$ per la base di Frenet di α, e k_α, τ_α per curvatura e torsione di α. Allora $\alpha'(t) = T(t) = T_\alpha(t)$,

e che $\alpha''(t) = T'(t) = \begin{cases} k(t)\, N(t) & \forall t \quad \text{per il punto 1)} \\ k_\alpha(t)\, N_\alpha(t) & \text{per la def. di curvatura} \end{cases}$

Da questo segue che $k = k_\alpha$ e $T_\alpha = T$, $N_\alpha = N$.

Ma allora $B_\alpha = B$, e

$$\begin{array}{l} B' \underset{\uparrow \text{ dal punto 1)}}{=} -\tau N \\ \parallel \\ B'_\alpha = -\tau_\alpha N_\alpha = -\tau_\alpha N \end{array}$$

da cui $\tau_\alpha = \tau$.