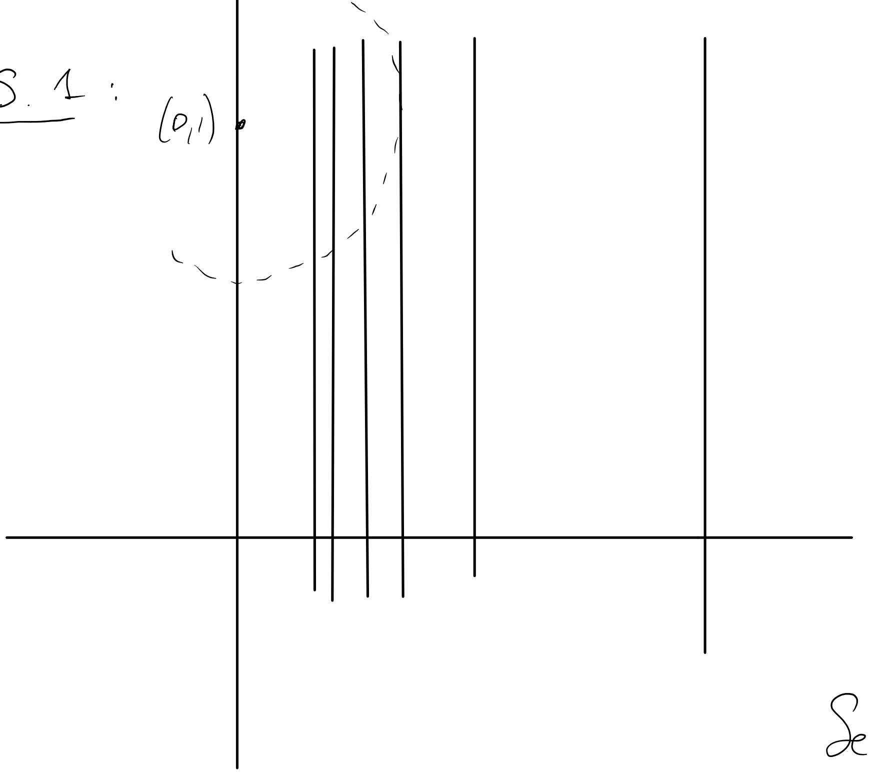
Es. 1:



Sia $B_{1/2}(0,1) \cap X = U$ intorno di $(0,1) \in X$ in X.

Data la proiezione $p: X \longrightarrow \mathbb{R}$ sull'asse x, vale

$$p(U) = \{0, 1/3, 1/4, 1/5, \dots\}$$

Se X fosse localm. connesso per archi per assurdo, esisterebbe $V \subseteq U$ intorno di $(0,1)$ in X con V connesso per archi. D'altronde V contiene $B_{1/m}(0,1) \cap X$ per qualche $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ e allora V contiene anche il punto $\left(\frac{1}{m+1}, 1\right)$ che ha proiezione $\frac{1}{m+1}$ sull'asse x. Deve esistere un cammino $\alpha \in \Omega\left(V, (0,1), \left(\frac{1}{m+1}, 1\right)\right)$, la proiezione $p \circ \alpha$ di α è un cammino in $\mathbb{R}$ da 0 a $\frac{1}{m+1}$, tutto contenuto in $p(V) \subseteq p(U) = \{0, 1/3, 1/4, \dots\}$: assurdo.

Segue: X non è localm. connesso per archi.

Es. 2: (1) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ha come retratto per deformazione

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

quindi $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, i suoi sottogruppi non banali sono $n\mathbb{Z}$ $(\subseteq \mathbb{Z})$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$.

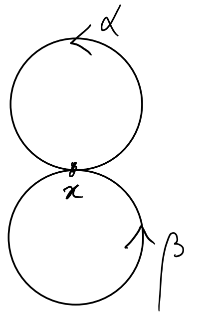
Dato n, il rivestim. corrispondente è $p_n: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

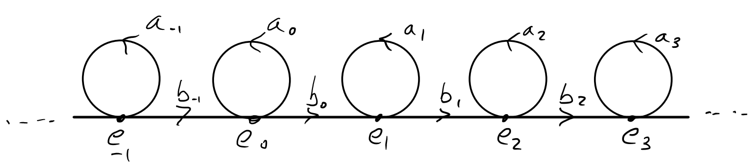
$$z \longmapsto z^n$$

E' facile verificare che p_n è un rivestimento (usando le propr. delle radici n-esime in $\mathbb{C}$, che sono continue in ogni $z \neq 0$).
Un generatore di $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ è dato dal cammino $t \mapsto e^{2\pi t}$, da cui si deduce $(p_n)_*(\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = n\mathbb{Z}$.

(2) Il rivestimento è $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, anche qui si dimostra facilmente che è un rivestim. usando le proprietà del logaritmo su $\mathbb{C}$, definito localm. e continuo in ogni punto di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Es. 3:

$X =$ 

$E =$ 

1) Si manda E su X mandando le circonferenze „a" sulla circonferenza superiore di X, i segmenti „b" avvolti ciascuno sulla circonferenza inferiore di X, in modo che i punti $\ldots e_{-1}, e_0, e_1, e_2, \ldots$ di E vadano tutti in $x \in X$.
(Oss.: vale semplicem. $e_n = (n, 0) \in E \subseteq \mathbb{R}^2 \ \forall n \in \mathbb{Z}$).
Scelto $e_0 = e$, abb. $[a_0] \in \pi_1(E, e)$ e $p_*([a_0]) = [\alpha]$.
Dimostriamo che $[\beta] \notin p_*(\pi_1(E,e))$: il sollevam. di β partendo da e_0 coincide con b_0, che non è un cammino chiuso, quindi $[\beta] \notin p_*(\pi_1(E,e))$

2) Abb.: $$[\beta]^m \cdot [\alpha] \cdot [\beta]^{-m} =$$

$$= [\underbrace{\beta * \dots * \beta}_{m \text{ volte}} * \alpha * \underbrace{i(\beta) * \dots * i(\beta)}_{m \text{ volte}}].$$

Il cammino dentro le parentesi si solleva partendo da $e_0 = e$ in questo modo:

$$\underbrace{b_0}_{\substack{\text{solleva } \beta \\ \text{partendo da} \\ e_0, \text{ finisce} \\ \text{in } e_1}} * \underbrace{b_1}_{\substack{\text{solleva } \beta \\ \text{partendo} \\ \text{da } e_1, \text{ finisce} \\ \text{in } e_2}} \dots * \underbrace{b_{m-1}}_{\substack{\text{da } e_{m-1} \\ \text{a } e_m}} * \underbrace{a_m}_{\substack{\text{da } e_m \\ \text{a } e_m}} * \underbrace{i(b_{m-1})}_{\substack{\text{da } e_m \\ \text{a } e_{m-1}}} * \dots * \underbrace{i(b_0)}_{\substack{\text{da } e_1 \\ \text{a } e_0}}$$

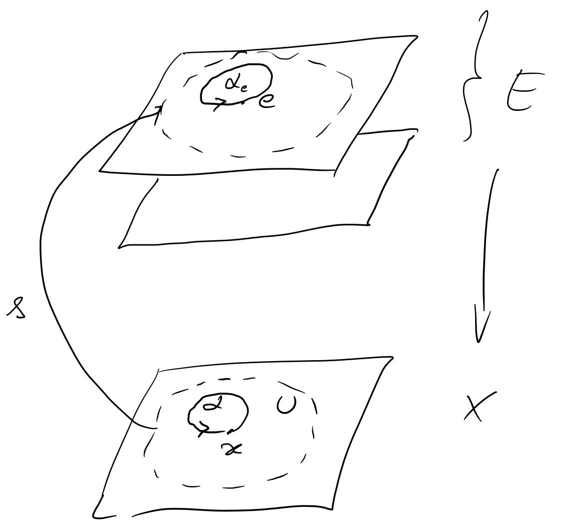
quindi il solleνam. è chiuso, da cui

$$[\beta * \dots * \beta * \alpha * i(\beta) * \dots * i(\beta)] \in p_*(\pi_1(E, e)).$$

ES. 4: 1) Sia $U \ni x$ un aperto banalizzante, e sia $\alpha \in \Omega(U, x, x)$.

Solleviamo α a E partendo da un punto $e \in p^{-1}(x)$: visto che α è tutto contenuto in un ap. banalizzante, α si solleva componendolo con la sezione locale s di p che manda omeomorficam. U in un intorno ap. di e:

$$\underbrace{\alpha_e}_{\substack{\text{sollevam.} \\ \text{di } \alpha}} = s \circ \alpha$$

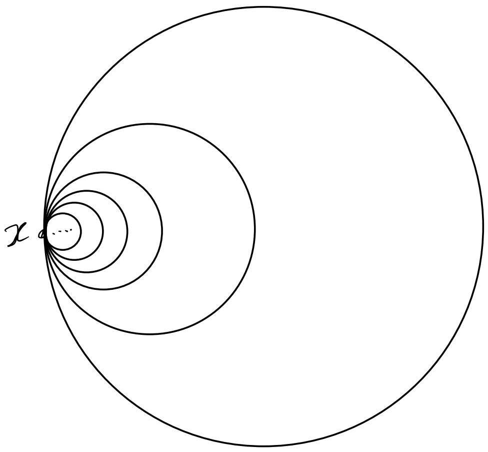


Segue che α_e è chiuso, visto che E è semplicem. connesso allora $\alpha_e \sim 1_e$ come cammini in E, da cui deduciamo

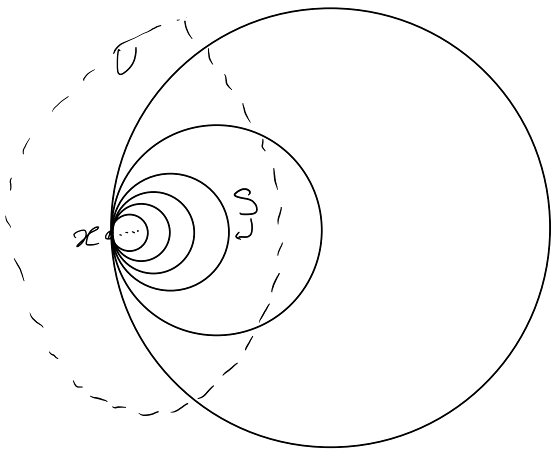
$\alpha \sim 1_x$ come cammini in X.

2) E' solo una riformulazione di 1).

<u>Es. 5:</u> Dimostriamo che X non è semilocalmente semplicemente connesso, dall'es. 4 seguirà che X non ha alcun rivestim. universale.



Consid. $x=(0,0)$ il punto di intersez. delle circonferenze, sia per assurdo U un intorno di x come nell'es. 4, allora U contiene una palla aperta di centro x intersecata con X, quindi U contiene una delle circonf., mettiamo S. Osserviamo che S è un retratto di X, basta mandare tutte le circonferenze diverse da S nel punto x, e S in se stessa con l'identità.



Restringendo questa retrazione $X \to S$ a U, otteniamo una retrazione $U \to S$.

Consideriamo le inclusioni $S \to U \to X$ e gli omomorfismi indotti

$$\begin{tikzcd} \underset{\cong \mathbb{Z}}{\pi_1(S)} \arrow[r, "\text{iniettiva}"'] \arrow[rr, bend right, "\text{iniettiva}"'] & \pi_1(U) \arrow[r] & \pi_1(X) \end{tikzcd}$$

Visto che $\pi_1(S)$ è non banale, $\pi_1(S) \to \pi_1(U)$ è iniettiva e la composizione $\pi_1(S) \longrightarrow \pi_1(X)$ anche è iniettiva, segue che $\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X)$ non può essere l'applicaz. banale, quindi otteniamo un assurdo.

Es. 6: Conviene descrivere il toro T come quoziente di $\mathbb{R}^2$ per il gruppo G delle traslazioni per elem. di $\mathbb{Z}^2$. Consideriamo come aperti di $\mathbb{R}^2$ le palle aperte di raggio $\frac{1}{3}$. Se V è una di esse, allora i punti di V vengono identificati solo a se stessi dal gruppo G, cioè V va iniettivamente nel quoziente $T = \mathbb{R}^2/G$. Lo stesso vale per la chiusura $\overline{V}$ di $\mathbb{R}^2$, è un compatto che va iniettivamente in un Hausdorff, quindi $\overline{V} \xrightarrow{p} p(\overline{V})$ è un omeomorfismo ($p: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/G$ è il quoziente). Allora $V \xrightarrow{p} p(V)$ è un omeomorfismo. Inoltre $p(V)$ è aperto perché p è aperta, quindi possiamo porre $U = p(V)$ e $\varphi: U \longrightarrow V$ l'inversa dell'omeom. di prima, è una carta locale per T.