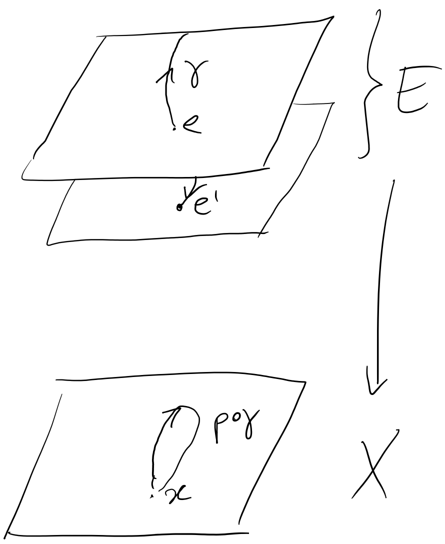
Es. 1:



Sappiamo che p è continua e aperta. X è connesso e E è non vuoto, quindi p è suriettiva.

Dim. che p è iniettiva.

Siano $e, e' \in E$ tali che $p(e) = p(e') = x$.

Prendiamo $\gamma \in \Omega(E, e, e')$, allora $p \circ \gamma$ è un cammino chiuso in X, ed è equivalente a 1_x perché X è sempl. connesso. Segue: il sollevam. γ di $p\circ\gamma$ è un cammino chiuso, cioè $e = e'$. Segue: p è iniettiva, quindi è omeomorfismo.

Es. 2: S^2 è omeomorfa a $[0,1]^2/\sim$ dove $\sim = \sim_B$ identifica il bordo $B = (\{0,1\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0,1\})$ di $[0,1]^2$ a un punto. Infatti prendiamo $S^2 \setminus \{(0,0,1)\} = \tilde{S}^2$ e un omeomorfismo $\tilde{S}^2 \xrightarrow[\text{(Pr. stereogr.)}]{} \mathbb{R}^2 \longrightarrow]0,1[^2$.

La composizione $\tilde{S}^2 \longrightarrow]0,1[^2 \xrightarrow{\pi} \pi(]0,1[^2)$ è biiettiva e cont., e si dim. facilmente che si estende a $S^2 \longrightarrow [0,1]^2/\sim$ biiettiva e continua fra S^2 e $[0,1]^2/\sim$ che è facilmente T2 (qui $\pi: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]^2/\sim$ è il quoziente).

Allora è un omeomorfismo.

Data ora $f: S^2 \longrightarrow X$, consid.

$$\tilde{f}: [0,1]^2 \xrightarrow{\pi} [0,1]^2/\sim \xrightarrow{\text{omeom.}} S^2 \longrightarrow X$$

e sappiamo che si solleva a $\tilde{g}: [0,1]^2 \longrightarrow E$.

Visto che $\tilde{f}$ manda B in un singolo punto di X, anche il sollevamento $\tilde{g}$ manda B in un singolo punto di E, cioè $\tilde{g}$ passa al quoziente:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]^2} \arrow[rr, "\tilde{g}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & E \\ & {[0,1]^2/\sim} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

e g solleva f.

Es. 3: Se $\{x\}$ fosse retratto per def. di S^1 allora avrebbe gruppo fondamentale ($=$ banale) isomorfo a quello di S^1 ($\cong \mathbb{Z}$): assurdo.

Es. 4: 1) f passa al quoziente perché $f(0) = [1,0] = [-1,0] = f(1)$, ottenendo $g: S^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ continua e biiettiva da un compatto in un T2: g è omeomorfismo.

2) da 1) segue $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

3) Sia α il cammino che percorre S^1 una volta in senso

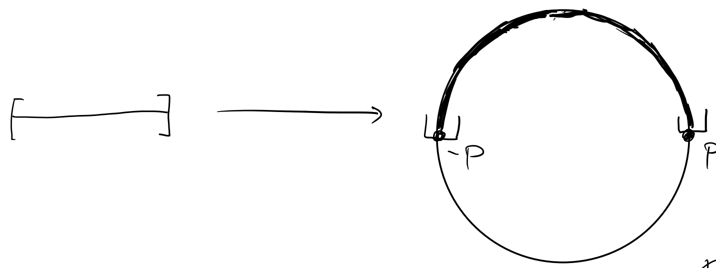
antiorario. La classe $[\alpha]$ corrisp. a $1 \in \mathbb{Z}$ nell'isomorfismo visto a lezione $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$. Vediamo a che cammino corrisponde tramite g. Abb.

$$\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

e scriviamo $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ nel modo seguente:

$$f: [0,1] \longrightarrow S^1 \xrightarrow{F} \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$$

$$t \longmapsto (\cos(\pi t), \sin(\pi t)) \longmapsto [\cos(\pi t), \sin(\pi t)]$$



Osserviamo che f percorre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ facendo proprio un solo giro (infatti passa al quoziente diventando $g: S^1 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$), quindi possiamo pensare f come un cammino la cui classe genera $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z}$.

Fare $F_*[\alpha]$ vuol dire considerare il cammino

$$F \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$$

che è $(F \circ \alpha)(t) = [\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)]$

Confrontiamolo con $[f * f]$: la giunzione $f * f$ è il cammino

$$[0,1] \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} [\cos(\pi \cdot 2t), \sin(\pi \cdot 2t)] & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ [\cos(\pi \cdot (2t-1)), \sin(\pi \cdot 2t-1)] & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ma $[\cos(\underbrace{\pi \cdot (2t-1)}_{\overset{\shortparallel}{2\pi t - \pi}}), \sin(\underbrace{\pi \cdot (2t-1)}_{2\pi t - \pi})] = [-\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t)] =$

$= [\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)]$

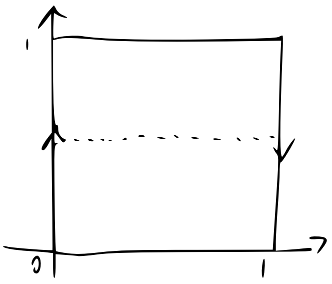
Cioè $f * f = F \circ \alpha$. Allora la classe $[\alpha] \in \pi_1(S^1)$ che corrisponde a $1 \in \mathbb{Z}$ va nel doppio (in notaz. additiva) o nel quadrato (in notazione moltiplicativa) del generatore che abb. scelto per $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z}$. Per $\mathbb{Z}$ usiamo la notazione additiva, e otteniamo che $F_*: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è l'omomorfismo che manda 1 in $1+1=2$, cioè è $n \longmapsto 2n$.

Es. 5: Nastro di Möbius: $M = \dfrac{[0,1]\times[0,1]}{\sim}$ ← identifica i lati verticali percorsi in senso opposto.

Def. un rivestimento di M dato da $E = \mathbb{R} \times [0,1]$ e $G \subseteq Omeo(E)$ generato da $a(x,y) = (x+1, 1-y)$. Abb.: G agisce in modo propriam. discontinuo, e come per l'es. 6

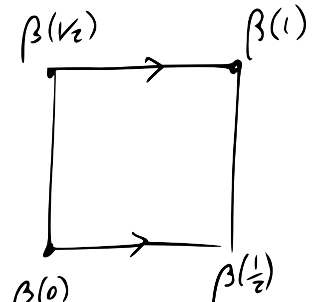
del foglio 9 si dim. che E/G è omeomorfo a M.

Questo mostra che $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$, possiamo anche vedere questa cosa come conseguenza di: l'immagine di $[0,1] \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$ in M è omeom a S^1 ed è retratto per deformazione di M (già visto).



Il „bordo" B di M è fatto da una copia di S^1, ottenuta come immagine di $\beta : [0,1] \longrightarrow M$ con

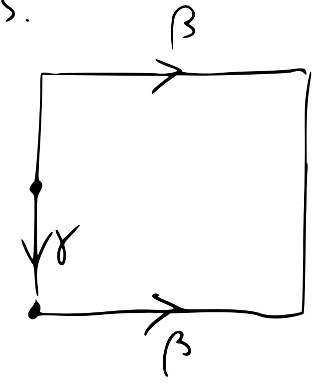
$$\beta(t) = \begin{cases} [(2t, 0)] & \text{per } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ [(2t-1, 1)] & \text{per } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



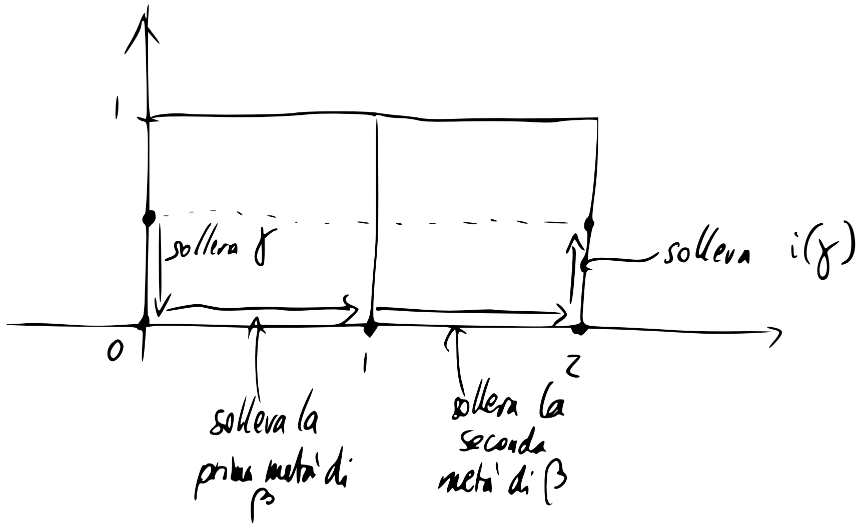
Questo cammino percorre B una volta, quindi la sua classe è un generatore di $\pi_1(B) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Prendiamo come punto base $[(0, \frac{1}{2})] \in M$, e calcoliamo a cosa corrisponde β nell'isomorfismo usuale, cioè prendiamo γ cammino da $[(0, \frac{1}{2})]$ a $[(0,0)]$ e vediamo β come corrispondente al cammino $\gamma * \beta * i(\gamma)$. Ad es.

$$\gamma(t) = \left[\left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\right]$$



Vediamo il sollevamento di $\gamma * \beta * i(\gamma)$ che parte da $(0, \frac{1}{2})$:



Allora $\underbrace{(0, \tfrac{1}{2}) \cdot [\gamma * \beta * i(\gamma)]}_{\text{punto finale del sollevato di } \gamma*\beta*i(\gamma) \text{ che parte da } (0,\frac{1}{2}) \in E} = (2, \frac{1}{2})$.

Grazie ai teoremi fatti a lez., possiamo capire a che elem. di $\pi_1(M)$ corrisponde $[\gamma * \beta * i(\gamma)]$ vedendo quale elem. di G (cioè quale potenza di a) manda $(0, \frac{1}{2})$ in $(2, \frac{1}{2})$.

L'elemento è $a^2 = a \circ a$. Ma $G \cong \mathbb{Z}$ tramite $a^n \longmapsto n$, quindi $[\gamma * \beta * i(\gamma)]$ corrisp. all'elem. $2 \in \mathbb{Z}$.

Segue: $i_* : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{\pi_1(B)}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{\pi_1(M)}}$ è $n \longmapsto 2n$.

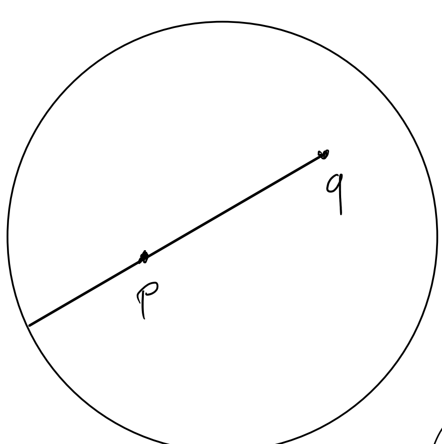
Con questo possiamo dimostrare <u>anche</u> che B <u>non</u> è un retratto di M. Per assurdo, sia B retratto di M, cioè $r: M \to B$ $\iota: B \to M$

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(B) & \xrightarrow{\iota_*} & \pi_1(M) & \xrightarrow{r_*} & \pi_1(B) \\ \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 2n & & \end{array}$$

la composizione $\iota_* \circ r_*$ è l'identità perché $\iota \circ r = Id_B$, ma questo è assurdo.

Quindi B non è retratto di M.

<u>Es. 6</u>:



La retta che cont. p e q è parametrizzata da

$$\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto tp + (1-t)q$$

($t=0$ dà p, $t=1$ dà q, $t\leq 0$ dà i punti dal lato di p)

Interseco la retta con S^1 che ha equaz. $\|\text{punto}\|^2 = 1$, imponendo l'eq.

$$\|tp + (1-t)q\|^2 = 1$$

e trovando i valori di t che la soddisfano. L'eq. è:

$$(tp + (1-t)q) \cdot (tp + (1-t)q) = 1$$

prod. scalare standard

$$t^2 p\cdot p + \underbrace{tp\cdot(1-t)q + (1-t)q\cdot tp}_{= 2(t-t^2)p\cdot q} + \underbrace{(1-t)^2}_{= 1-2t+t^2} q\cdot q = 1$$

$$t^2\underbrace{(p\cdot p - 2p\cdot q + q\cdot q)}_{= a} + t\underbrace{(2p\cdot q - 2q\cdot q)}_{b} + \underbrace{q\cdot q - 1}_{c} = 0$$

Radici $\quad \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = t$

La radice col segno negativo è minore o uguale dell'altra, quindi dà il valore del parametro del punto di intersez. dalla parte di t:

$$t_0 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Oss. $a = (p-q)\cdot(p-q) = \|p-q\|^2$ quindi $a \neq 0$ per tutti i valori consid. di p e q.

Allora t_0 è f.ne continua di (p,q) e il punto che ci interessa è $g(p,q) = t_0 p + (1-t_0)q$, anch'esso fne continua.

Es. 7: Abb. visto il riv. $S^n \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ con $n \geq 2$,

e sappiamo $|p^{-1}(x)| = \left| \dfrac{\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})}{p_* \pi_1(S^n)} \right| =$

$= |\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}})|$

perché $\pi_1(S^n)$ è banale se $n \geq 2$

L'unico gruppo con 2 elementi è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,

quindi $\pi_1(\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Es. 8: Abb. già visto in quell'esercizio che la bottiglia di Klein è omeomorfa a $X = \mathbb{R}^2/G$ dove G non è abeliano, e il quoz. $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^2/G$ è un rivestim..

Allora $\dfrac{\pi_1(X)}{p_* \pi_1(\mathbb{R}^2)} \cong G$, ma $\mathbb{R}^2$ è sempl. connesso, da cui $G \cong \pi_1(X)$ quindi $\pi_1(X)$ non è abeliano.