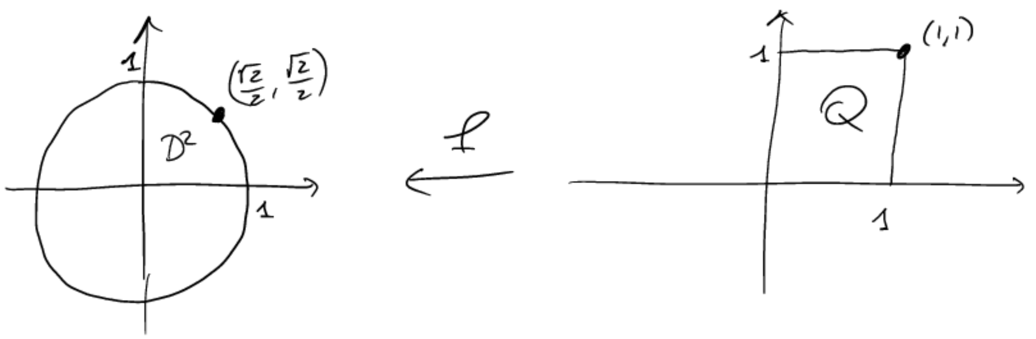
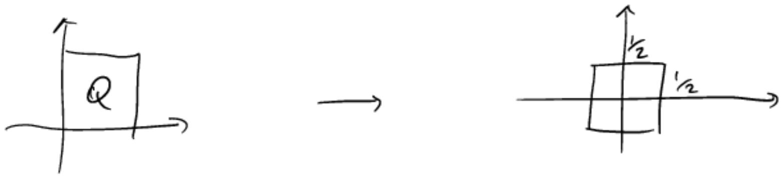
Soluzioni foglio n. 1, Geometria 2, 2022-2023

ES. 1:

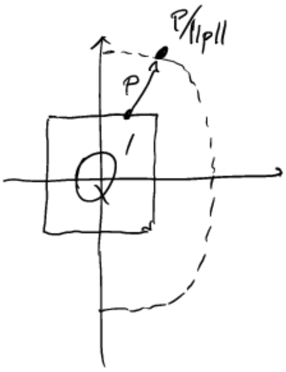


Costruisco f così:

1) f trasla Q in modo che sia centrato in $(0,0)$



2) Dato un punto sul bordo del quadrato, f rinormalizza il punto mandandolo in $\frac{p}{\|p\|}$



3) Se p non è sul bordo, invece di normalizzarlo lo riscalo a seconda della norma. Oss.: il bordo di Q' è fatto dai punti (a,b) tali che $\max\{|a|, |b|\} = \frac{1}{2}$.

Quindi: dato $(a,b) \in Q$, chiamo $(a', b') = \left(a - \frac{1}{2}, b - \frac{1}{2}\right)$, poi pongo

$$f(a,b) = (a', b') \cdot \frac{\max\{|a'|, |b'|\}}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} \cdot 2$$

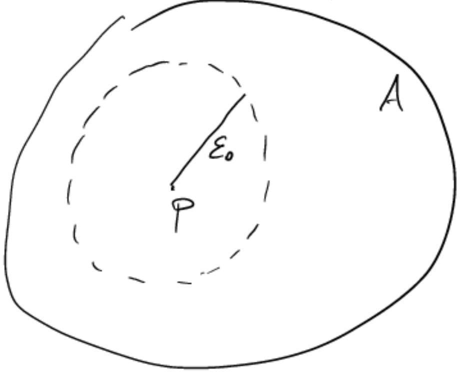
Ad es. $(1,1)\in Q$ viene mandato in

$$f(1,1) = \left(1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}\right)\cdot \frac{\max\left\{\left|\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{1}{2}\right|\right\}}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}}\cdot 2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\cdot \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \sqrt{2}\cdot \cancel{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in S^1$$

Es. 2: Supp. per assurdo esista $g : [0,2] \longrightarrow [0,1] \cup \,]2,3]$ continua biiettiva. C'è un punto $x\in[0,2]$ tale che $f(x)=1$, e c'è un punto $y\in[0,2]$ tale che $f(y)=3$. Consid. g come applicaz. $[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua: ogni valore fra 1 e 3 dev'essere assunto (teorema del valor medio), ma questo è assurdo perché ad es. $2\notin[0,1]\cup\,]2,3]$.

Es. 3: Supp. $A\subseteq\mathbb{R}^n$ aperto, dim. che $C=\mathbb{R}^n\setminus A$ è chiuso, quindi sia $p\in\mathbb{R}^n$ sia aderente a C. Cioè $\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon\in C \mid \|p-c_\varepsilon\|<\varepsilon$. Supp. per assurdo $p\notin C$, cioè $p\in A$, allora $\exists\,\varepsilon_0>0$



tale che per ogni $x\in\mathbb{R}^n$ che soddisfa $\|p-x\|<\varepsilon_0$ vale $x\in A$, ma c_{ε_0} è in C: assurdo.

Viceversa, supp. $C=\mathbb{R}^n\setminus A$ chiuso, dim. che A è aperto.
Sia $p\in A$, allora $p\notin C$, quindi p non è aderente a C.

Allora $\exists \varepsilon > 0 \mid$ per ogni x tale che $\|x-p\| < \varepsilon$ vale $x \notin C$, cioè $x \in A$, e allora A è aperto.

Es. 4: 1) Sia $X = \{a, b\}$ di cardinalità 2, cioè $a \neq b$. Abbiamo la top. banale $\{\emptyset, X\}$ e quella discreta $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$. Sia T una topologia, supp. non banale e non discreta, quindi T contiene un sottoinsieme diverso da $\emptyset$ e da X, ma non entrambi $\{a\}$ e $\{b\}$.

Uniche possibilità:

$$T = \{\emptyset, \{a\}, X\} \qquad \text{oppure} \qquad T = \{\emptyset, \{b\}, X\}$$

e si vede facilmente che sono entrambe topologie.

2) Dato $X = \{a, b, c, d, e\}$ con $|X| = 5$, ad es.

$$T = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,c,d\}, X\}$$

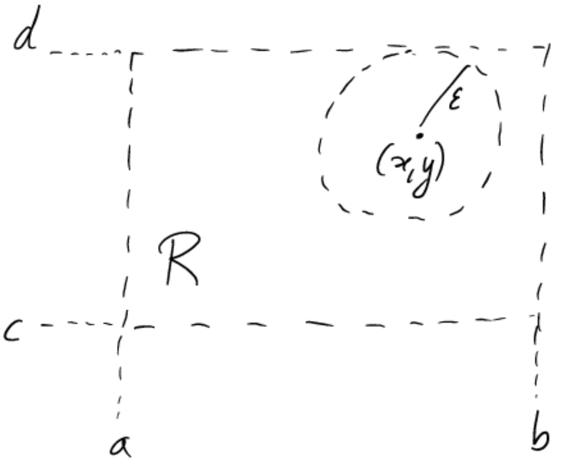
è una topologia (verifica immediata)

Es. 5: La famiglia $\mathcal{B}_1$ è base della top. euclidea, in pratica per definizione. Infatti A è aperto se e solo se

$\forall p \in A \ \exists\, \varepsilon_p > 0 \mid B_{\varepsilon_p}(p) \subseteq A$, da cui

$$A = \bigcup_{p \in A} B_{\varepsilon_p}(p)$$. Inoltre sappiamo che $B_{\varepsilon_p}(p)$ è aperto in top. euclidea, quindi $\mathcal{B}_1$ è una famiglia di aperti e ogni aperto si scrive come unione di elem. di $\mathcal{B}_1$ (anche l'insieme vuoto, come unione della famiglia vuota).

Verifichiamo con la fam. $\mathcal{B}_2$. Intanto verifichiamo che $\mathcal{B}_2$ è fatta di aperti: dato un rettangolo aperto $]a,b[\times]c,d[=R$ e un punto $p=(x,y)$,



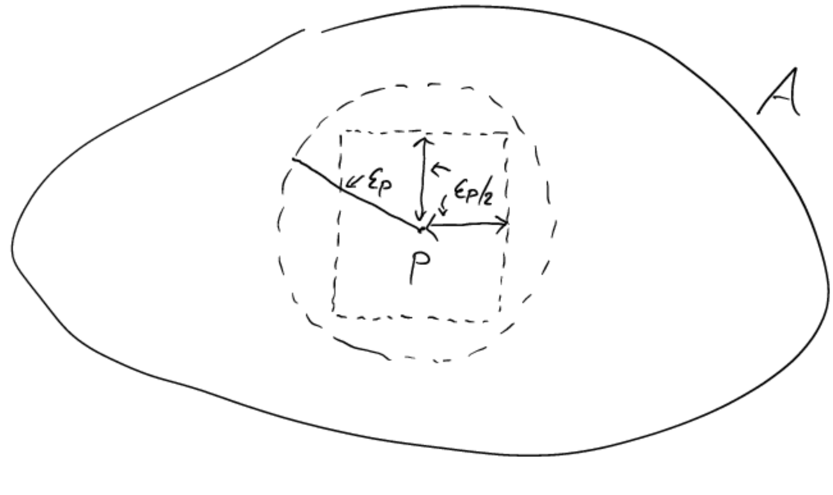
poniamo

$\varepsilon = \min\{x-a,\ b-x,\ y-c,\ d-y\}\ (>0)$

e oss. che ogni q tale che $\|p-q\|<\varepsilon$ soddisfa $q \in R$. Cioè $B_\varepsilon(p) \subseteq R$, da cui R è aperto.

Sia ora $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, e per ogni $p \in A$ scegliamo $\varepsilon_p > 0$ come prima.

Sia $p=(x,y)$



Osserviamo che per ogni $q \in \left]x-\frac{\varepsilon_p}{2}, x+\frac{\varepsilon_p}{2}\right[\times \left]y-\frac{\varepsilon_p}{2}, y+\frac{\varepsilon_p}{2}\right[= R_p$

abbiamo $\|p-q\| < \varepsilon_p$, quindi il rettangolo aperto R_p

è contenuto nel disco aperto $B_{\varepsilon_p}(p)$. Quindi

$$A = \bigcup_{p \in A} R_p$$

da cui $\mathcal{B}_2$ è base della top. euclidea.

<u>Es. 6</u>: Verifichiamo le condiz. 1) e 2) della proposizione vista a lezione, che assicurano l'esistenza di $\mathcal{T}$ data la famiglia $\mathcal{B}$ „candidata base".

1) Dobbiamo poter scrivere $\mathbb{R}$ come unione di elem. di $\mathcal{B}$, facile:

$$\mathbb{R} = \underbrace{]-\infty, 1[}_{\in \mathcal{B}} \cup \underbrace{]0, +\infty[}_{\in \mathcal{B}}$$

2) Dati $E, F \in \mathcal{B}$, dobbiamo poter scrivere $E \cap F$ come unione di elem. di $\mathcal{B}$. Se E, F sono intervalli aperti:

$$E =]a, b[, \quad F =]c, d[\quad \text{con} \quad \begin{array}{ll} a, c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} & a<b \\ b, d \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} & c<d \end{array}$$

allora $E \cap F =]\max\{a,c\}, \min\{b,d\}[$ è un intervallo aperto (eventualmente vuoto!).

Se E e F sono intervalli privati di $\mathbb{Z}$, allora

$E = \left]a,b\right[\setminus \mathbb{Z}$, $\qquad F = \left]c,d\right[\setminus \mathbb{Z}$ $\qquad$ (a,b,c,d come prima)

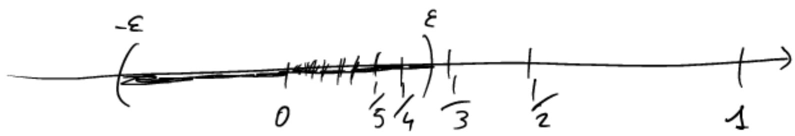
e vale $E \cap F = \big(\underbrace{\left]a,b\right[\cap \left]c,d\right[}_{\text{intervallo ap.}} \big) \setminus \mathbb{Z} \in \mathcal{B}$

Se invece E è un intervallo, e F è un intervallo privato di $\mathbb{Z}$:

$E = \left]a,b\right[$, $\quad F = \left]c,d\right[\setminus \mathbb{Z}$, vale

$E \cap F = \big(\underbrace{\left]a,b\right[\cap \left]c,d\right[}_{\text{intervallo ap.}} \big) \setminus \mathbb{Z} \in \mathcal{B}$

e analogamente se E e F sono scambiati. Quindi $\mathcal{B}$ è base di una topologia. L'insieme $\left]-1,1\right[\setminus \mathbb{Z}$ è aperto per questa topologia, ma non è aperto in top. euclidea, perché contiene $0 \in \mathbb{R}$ ma non contiene alcun intervallo del tipo $\left]0-\varepsilon, 0+\varepsilon\right[$ anche se ε è molto piccolo, perché in quell'intervallo ci sono sicuramente punti di $\mathbb{Z}$:



Es. 7: Verifichiamo gli assiomi di topologia:

1) $\emptyset \in T$ per def., $\quad X \in T$ perché $X \setminus X = \emptyset$ è un ins. finito.

2) Siano $A_i \in T$ per ogni $i \in I$, consid. $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Se $A_i = \emptyset \ \forall i \in I$ allora $A = \emptyset$ è in T.

Altrimenti sia $i_0 \in I$ tale che $X \setminus A_{i_0}$ è un insieme finito,

allora
$$X \setminus A = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) = (X \setminus A_{i_0}) \cap \left(\bigcap_{i \in I \setminus \{i_0\}} (X \setminus A_i) \right)$$

è un insieme finito perché $X \setminus A_{i_0}$ è finito. Segue: $A \in \mathcal{T}$.

3) Dati $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, consid. $B = A_1 \cap A_2$. Se A_1 opp. A_2 è vuoto, allora $B = \emptyset$ è in $\mathcal{T}$. Altrim. $X \setminus A_1$ è finito e anche $X \setminus A_2$, allora

$$X \setminus B = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$ è finito quindi è in $\mathcal{T}$.

Se X è un insieme finito allora la topologia cofinita è discreta.
Se la top. cofinita è discreta allora $X = X \setminus \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aperto}}}{\emptyset}$ è vuoto oppure un insieme finito, cioè X è un insieme finito.

<u>Es. 8</u>: (1) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto per la top. cofinita. Se $A = \emptyset$ allora è aperto in top. euclidea, altrim. $\mathbb{R} \setminus A$ è un ins finito, cioè $\mathbb{R} \setminus A = \{p_1, \dots, p_m\}$ (opp. $\mathbb{R} \setminus A = \emptyset$). Poss. supporre $p_1 < p_2 < \dots < p_m$, e allora

$$A =]-\infty, p_1[\cup]p_1, p_2[\cup \dots \cup]p_{m-1}, p_m[\cup]p_m, +\infty[$$

(opp. $A = \mathbb{R}$) e A è aperto in top. euclidea.

(2) Supp. per assurdo esistano A, B aperti disgiunti con $A \ni p$, $B \ni q$. Allora $A, B \neq \phi$, per cui $\mathbb{R} \setminus A$ e $\mathbb{R} \setminus B$ sono sottoins. finiti. Ma $A \cap B = \phi$ implica $(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R}$, da cui seguirebbe $\mathbb{R}$ finito: <u>assurdo</u>.

(3) basta prendere $\varepsilon = \frac{1}{2} d(p,q)$ e
$A = B_\varepsilon(p)$, $B = B_\varepsilon(q)$.

<u>Es. 9:</u> Per ogni $x \in X$ l'insieme $\{x\}$ è aperto per la top. discreta, quindi $\{x\}$ si deve poter scrivere come unione di elem. di $\mathcal{B}$, cioè c'è almeno un elem. di $\mathcal{B}$ che cont. x e nessun altro punto. Questo elem. di $\mathcal{B}$ è proprio $\{x\}$.

<u>Es. 10:</u> 1) Sia $f \in K[x]$ polinomio, l'insieme $X_f = \{ p \in K \mid f(p) \neq 0 \}$ ha come complementare $V(f) = \{ p \in K \mid f(p) = 0 \}$ che è tutto K (se $f \equiv 0$) oppure un ins. finito di punti.

Quindi gli insiemi $\{ X_f \mid f \in K[x] \}$ che sono una base della top. di Zariski sono anche aperti in top. cofinita. Segue: la top. di Zariski è meno fine della top. cofinita.

Viceversa, sia $A \subseteq K$ aperto in top. cofinita: se $A = \phi$ allora $A = X_f$ con $f \equiv 1$, invece se $A = K$ allora $A = X_f$ con $f \equiv 0$, invece se $K \setminus A = \{p_1, \dots, p_d\}$ finito non vuoto allora

$$A = X_f \quad \text{con} \quad f = (x - p_1) \cdots (x - p_d).$$

Quindi la top. cofinita è meno fine della top. di Zariski su K.

2) Sia $C = V(S)$ con $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$, allora

$$C = \{ p \in K^n \mid f(p) = 0 \ \forall f \in S \} = \bigcap_{f \in S} V(f)$$

quindi $K^n \setminus C = \bigcup_{f \in S} X_f$ da cui C è chiuso.

Viceversa, sia C chiuso, scriviamo $K^n \setminus C$ come unione di elem. della base, cioè sia $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ sottoins. t.c.

$$K^n \setminus C = \bigcup_{f \in S} X_f$$

da cui $C = \bigcap_{f \in S} V(f) = V(S)$.

3) Dato $p \in V(I)$, su p si annullano tutti gli elem. di S, perché $S \subseteq I$. Allora $p \in V(S)$, da cui $V(I) \subseteq V(S)$.

Viceversa, sia $p \in V(S)$ e sia $f \in I = (S)$. f è comb. lin. di elem. di S a coeff. polinomi, cioè esistono

$s_1, \dots, s_m \in S$, $\quad g_1, \dots, g_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ tali che

$$f = g_1 s_1 + \dots + g_m s_m$$

Allora $f(p) = g_1(p)\underbrace{s_1(p)}_{=0} + \dots + g_m(p)\underbrace{s_m(p)}_{=0} = 0$

da cui $p \in V(I)$. Segue $V(S) \subseteq V(I)$.

<u>Es. 11:</u> 1) Verifichiamo le condizioni date in una proposizione:

a) X è unione di elem. di $\mathcal{B}$: sì, basta prendere

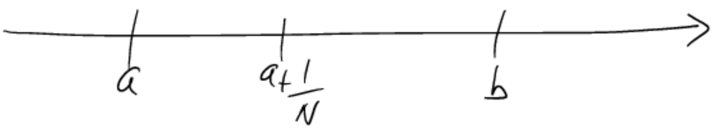
$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1[$$

b) l'intersez. $[a,b[\cap [c,d[$ (con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a<b$, $c<d$) è vuota oppure uguale a

$[\max\{a,c\}, \min\{b,d\}[$

per cui è essa stessa un elem. di $\mathcal{B}$, oppure è unione vuota di elem. di $\mathcal{B}$.

2) Scegliamo $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $a + \frac{1}{N} < b$



Allora $\quad]a,b[= \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\geq N}} [a+\frac{1}{n}, b[$

3) Gli intervalli aperti $]a,b[$ con $a,b\in\mathbb{R}$ e $a<b$ formano una base della top. euclidea. Per il punto 2), possiamo scrivere ciascuno di essi come unione di aperti di Sorgenfrey, quindi ogni ap. euclideo è aperto di Sorgenfrey.

Inoltre $[0,1[$ non è aperto in top. euclidea.

4) $\mathbb{R}\setminus[a,b[=]-\infty, a[\cup [b,+\infty[=$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} \left([a-n, a[\cup [b, b+n[\right)$$

aperti

quindi $[a,b[$ è anche chiuso.

<u>Es. 12:</u> Scriviamo X come unione di elem. di $\mathcal{B}=\{M_a \mid a\in X\}$, basta oss. che $a\in M_a$, da cui

$$X = \bigcup_{a\in X} M_a$$

Dati ora M_a, M_b con $a,b\in X$, consid. $M_a\cap M_b$.

Dato $c\in M_a\cap M_b$, vogliamo trovare un elem. N di $\mathcal{B}$ tale che

$c \in N \subseteq M_a \cap M_b$. Osserviamo che $c \geq a$ e $c \geq b$, quindi se $x \geq c$ allora $x \in M_a \cap M_b$. Quindi $M_c \subseteq M_a \cap M_b$, e allora basta prendere $N = M_c$. Cioè vale

$$M_a \cap M_b = \bigcup_{c \in M_a \cap M_b} M_c .$$

Es. 13: $\Rightarrow$) Sia D denso e $A \subseteq X$ non vuoto. Supp. per assurdo $D \cap A = \emptyset$, da cui $D \subseteq X \setminus A$, che è un chiuso proprio di X. Segue $\overline{D} \subseteq X \setminus A \subsetneq X$: assurdo

$\Leftarrow$) Supp. D intersechi ogni ap. non vuoto, supp. per assurdo D non denso: $\overline{D} \subsetneq X$. Allora D non interseca l'aperto non vuoto $X \setminus \overline{D}$: assurdo.

Es. 14: 1) a) $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}]-n, n[$

b) $]a,b[\cap]c,d[= \begin{cases} \emptyset & \text{opp.} \\ ]\max\{a,c\}, \min\{b,d\}[\end{cases}$

2) $([0,1[)^\circ =]0,1[$, $\overline{[0,1[} = [0,1]$

$]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[^\circ =]1,2[$ $\overline{]\frac{1}{2}, \frac{5}{2}[} = [0,3]$

Es. 15: Sappiamo che i chiusi di $X = \mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}$ stesso opp. sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$. Fra questi, solo $\mathbb{R}$ contiene $[0,1]$, quindi

$$\overline{[0,1]} = \bigcap_{\substack{C \subseteq \mathbb{R} \\ C \text{ chiuso} \\ C \supseteq [0,1]}} C = \mathbb{R}$$

Es. 16: Falso, ad es. $\emptyset \subseteq \mathbb{R}$ ← con top. cofinita non è denso, perché è chiuso quindi $\overline{\emptyset} = \emptyset \neq \mathbb{R}$.

Però è vero che ogni sottoinsieme <u>infinito</u> è denso.

Es. 17: $\Rightarrow)$ Sia $U \subseteq X$ <u>aperto</u> e sia $p \in U$. L'insieme U è un intorno di p, basta scegliere $A = U$ nella def. di intorno.

$\Leftarrow)$ Sia $U \subseteq X$ intorno di ciascun suo punto. Per ogni $p \in U$ scegliamo A_p aperto tale che $p \in A_p \subseteq U$.

Vale allora $\displaystyle U = \bigcup_{p \in U} A_p$ perciò U è aperto.

Es. 18: 1) Abbiamo U intorno di p, e $V \supseteq U$. Sappiamo che esiste A aperto tale che $p \in A \subseteq U$, ma vale anche $p \in A \subseteq V$, da cui V è intorno di p.

2) Sia A aperto con $p \in A \subseteq U$, e sia A' aperto

con $p \in A' \subseteq U'$. Allora

$p \in \underbrace{A \cup A'}_{\uparrow \text{aperto}} \subseteq U \cup U'$ per cui $U \cup U'$ è intorno di p,

$p \in \underbrace{A \cap A'}_{\uparrow \text{aperto}} \subseteq U \cap U'$ per cui $U \cap U'$ è int. di p.

Es. 19: Supp. $x \in \overline{D}$ e dim. che $D \cap U \neq \emptyset$ $\forall U \in \mathcal{J}$.

Dato $U \in \mathcal{J}$, U è un intorno di x quindi sappiamo già che interseca D.

Viceversa, supp. $D \cap U \neq \emptyset$ $\forall U \in \mathcal{J}$ e dim. che $x \in \overline{D}$.

Lo dimostriamo verificando che $W \cap D \neq \emptyset$ per ogni intorno W di x. Dato W, esiste $U \in \mathcal{J}$ t.c. $U \subseteq W$. Sappiamo $U \cap D \neq \emptyset$, ma da questo segue $W \cap D \neq \emptyset$.

Es. 20: 1) $\mathcal{J}_1$: non è un sist. fond. di intorni, infatti $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ è un intorno di 0 ma non contiene elem. di $\mathcal{J}_1$.

2) $\mathcal{J}_2$ è un sist. fond. di intorni

3) $\mathcal{J}_3$ non è un sistema fond. di intorni: i suoi elem. non sono intorni di 0.