Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.7

21.4.2023

Esercizio 1. Si considerino applicazioni continue fra spazi topologici come segue:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D.$$

Dimostrare che se $g \circ f$ e $h \circ g$ sono omeomorfismi, allora f, g, h sono omeomorfismi. Inoltre, se invece A, B, C, D sono gruppi, dimostrare che se $g \circ f$ e $h \circ g$ sono isomorfismi, allora f, g, h sono isomorfismi.

Esercizi sulle sezioni **Omotopia, Retrazioni e deformazioni**:

Esercizio 2. Dimostrare che $\mathbb{Z}$ non è un retratto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia X spazio topologico e $Y \subseteq X$ un retratto di X. Dimostrare che se X è di Hausdorff allora Y è chiuso in X.

Esercizio 4. Sia $X = \mathbb{R}$. Determinare, giustificando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi sono retratti per deformazione di X:

(1) $Y = \{0\}$,
(2) $Z = [0, 1]$,
(3) $W =]0, 1[$.

Esercizio 5. Dimostrare che S^1 è un retratto per deformazione del nastro di Möbius.

Esercizio 6. Sia $D^2 = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p\| \leq 1\}$. Dimostrare che

$$Y = (D^2) \times \{0\}) \cup (S^1 \times [0, 1]),$$

cioè la superficie laterale di un cilindro unita a solo una delle due basi, è un retratto per deformazione di

$$X = D^2 \times [0, 1],$$

cioè il cilindro pieno.

Dato uno spazio topologico X, si può definire $\pi_0(X)$ come l'insieme delle sue componenti connesse per archi. Data inoltre un'applicazione continua $f \colon X \to Y$, si può definire $f_* \colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ nel modo seguente: data una componente connessa per archi $C \subseteq X$, si pone $f_*(C) = D$ dove D è la componente connessa per archi di Y che contiene $f(C)$. Usare questa costruzione per svolgere l'esercizio seguente.

Esercizio 7. (*difficile*) Siano a, b interi non negativi, sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di a elementi e sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di b elementi. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus A$ e $\mathbb{R}^n \setminus B$ non sono omeomorfi se $a \neq b$.

Esercizio 8. Sia

$$X = \{(t, ct) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1], c \in \mathbb{Q}\}.$$

(1) Dimostrare che $Y = \{(0, 0)\}$ è un retratto per deformazione di X.
(2) Sia $Z = \{(1, 0)\}$ e $p_n = (1, \frac{1}{n})$ per ogni $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Supponiamo Z sia un retratto per deformazione di X, sia $R \colon X \times [0, 1] \to X$ una deformazione. Dimostrare che $R(p_n, t)$ al variare di $t \in [0, 1]$ è un cammino da $(1, 0)$ a p_n.

(3) Dimostrare che per ogni n esiste un valore t_n tale che $R(p_n, t_n) = (0,0)$.
(4) Considerando la successione $n \mapsto t_n$ e una sua sottosuccessione convergente, dimostrare che esiste $t_\infty \in [0,1]$ tale che $R((1,0), t_\infty) = (1,0)$.
(5) Dimostrare che Z non è retratto per deformazione di X.

Esercizi sulla sezione **Gruppo fondamentale**:

Esercizio 9. Sia X spazio topologico e siano $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ aperti semplicemente connessi di X tali che

$$X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Dimostrare che X è semplicemente connesso.

Esercizio 10. (**da sapere**) Sia X spazio topologico semplicemente connesso, siano $p, q \in X$, e siano $\alpha, \beta \in \Omega(X, p, q)$. Dimostrare[1] che $\alpha \sim \beta$.

[1] Si può usare naturalmente che $\alpha * \iota(\beta)$ è equivalente al cammino costante 1_p, ma attenzione: va dimostrato che esiste un'omotopia *di cammini* da α a β, quindi per ogni valore del parametro i cammini "intermedi" fra α a β devono tutti avere gli stessi punti iniziale e finale.