Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.3

17.3.2023

Esercizi sulla sezione **Prodotti topologici**:

Esercizio 1. (**da sapere**) Sia P uno spazio topologico con base $\mathcal{B}$, e sia Q uno spazio topologico con base $\mathcal{B}'$. Dimostrare che
$$\{U \times V \mid U \in \mathcal{B},\ V \in \mathcal{B}'\}$$
è una base della topologia prodotto su $P \times Q$.

Esercizio 2. Se P e Q hanno entrambi topologia banale, anche il prodotto $P \times Q$ ha topologia banale? E se invece P e Q hanno entrambi topologia discreta, anche il prodotto $P \times Q$ ha topologia discreta?

Esercizio 3. (*difficile*) Siano P, Q spazi topologici entrambi con topologia cofinita e $P \times Q$ con topologia prodotto. Sia $C \subsetneq P \times Q$ un sottoinsieme proprio e chiuso, e sia $p\colon P \times Q \to P$ la proiezione sulla prima coordinata. Dimostrare che esiste un insieme finito di punti $F \subseteq Q$ tale che
$$p(C \setminus (P \times F))$$
è un insieme finito. Consideriamo ora $\mathbb{R}$ con topologia di Zariski; usare la prima parte dell'esercizio per dimostrare che la topologia prodotto su $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è diversa dalla topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 4. Sia P uno spazio topologico qualsiasi, e sia Q uno spazio topologico con solo un numero finito di elementi. Dimostrare che la proiezione $p\colon P \times Q \to P$ sulla prima componente è un'applicazione chiusa.

Esercizio 5. Siano $P = Q = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey, consideriamo $P \times Q$ con topologia prodotto, e sia $\nabla = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale "del secondo e quarto quadrante", con topologia di sottospazio indotta dal prodotto $P \times Q$. Dimostrare che per ogni $p \in \nabla$ l'insieme $\{p\}$ è aperto in ∇, cioè ∇ ha topologia discreta.

Esercizi sulla sezione **Spazi di Hausdorff**:

Esercizio 6. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia di Sorgenfrey. Dimostrare che X è di Hausdorff.

Esercizio 7. Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia descritta nell'esercizio 14 del foglio 1. Determinare se X è di Hausdorff.

Esercizio 8. Sia K un campo, e si consideri K^n con topologia di Zariski.

(1) Dimostrare che $\{p\}$ è un sottoinsieme chiuso di K^n per ogni $p \in K^n$.
(2) Dimostrare che K^n è di Hausdorff se K è un campo finito.
(3) Dimostrare che K^n non è di Hausdorff se K è un campo infinito e $n \geq 1$. (*Suggerimento*: $K = K^1$ non è di Hausdorff, inoltre esistono immersioni $K^1 \to K^n$.)

Esercizio 9. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e siano $x_1, \dots, x_n$ punti distinti di X. Dimostrare che esistono intorni $U_i \in \mathcal{I}(x_i)$ per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ tali che $U_i \cap U_j = \varnothing$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ con $i \neq j$.

Esercizio 10. (**da sapere**) Siano $f, g\colon X \to Y$ applicazioni continue fra spazi topologici. Supponiamo che Y sia di Hausdorff, e che esista un sottoinsieme denso A in X tale che $f|_A = g|_A$. Dimostrare che $f = g$.

Esercizi sulla sezione **Spazi topologici connessi**:

Esercizio 11. Consideriamo $\mathbb{R}$ con topologia euclidea, e $X \subseteq \mathbb{R}$ un sottospazio qualsiasi contenuto in $\mathbb{Q}$. Supponiamo che X abbia almeno due punti, dimostrare che X è sconnesso.

Esercizio 12. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia di Sorgenfrey.

(1) Dimostrare che X è sconnesso.
(2) Sia Y un sottospazio di X, dimostrare che Y è sconnesso se ha almeno due punti.

Esercizio 13. (**da sapere**)

(1) Siano X e Y spazi topologici omeomorfi, e sia $x \in X$ un punto qualsiasi. Dimostrare che esiste un punto $y \in Y$ tale che $X \setminus \{x\}$ e $Y \setminus \{y\}$ sono omeomorfi (entrambi con topologia di sottospazio).
(2) Usare il punto precedente per dimostrare che $[0, 1[$ e $]0, 1[$ non sono omeomorfi.

Esercizio 14. (*difficile*) Dimostrare che il "pettine con la pulce"

$$X = ([0, 1] \times \{0\}) \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, t \right) \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in [0, 1] \right\} \cup \{(0, 1)\}.$$

non è connesso per archi.

Esercizio 15. (**da sapere**) Sia X uno spazio topologico, supponiamo esistano due sottospazi Y, Z di X tali che $Y \cap Z \neq \varnothing$ e $X = Y \cup Z$.

(1) Dimostrare che X è connesso se Y e Z sono connessi.
(2) Dimostrare che X è connesso per archi se Y e Z sono connessi per archi.