

Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.2

10.3.2023

Esercizi sulla sezione **Applicazioni continue**:

Esercizio 1. (da sapere) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione fra spazi topologici, e sia \mathcal{B} una base della topologia di X . Dimostrare che f è continua se e solo se $f^{-1}(A)$ è aperto per ogni $A \in \mathcal{B}$.

Esercizio 2. (da sapere) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione biiettiva fra due spazi topologici.

- (1) Dimostrare che f è aperta se e solo se f^{-1} è continua.
- (2) Dimostrare che f è un omeomorfismo se e solo se f è continua e aperta.
- (3) Dimostrare che f è un omeomorfismo se e solo se f è continua e chiusa.

Esercizio 3. Siano X, Y spazi topologici, e $p \in Y$. Sia $f: X \rightarrow Y$ l'applicazione costante $f(x) = p$ per ogni $x \in X$. Dimostrare che f è continua, qualsiasi siano le topologie su X e su Y .

Esercizio 4. Siano $X = \mathbb{R}^2$ e $Y = \mathbb{R}$, entrambi con topologia di Zariski. Sia $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ un polinomio in due variabili, considerato come applicazione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare che f è continua.

Esercizio 5. Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione fra spazi topologici. Dimostrare che se f è aperta, allora l'immagine $f(X)$ è un aperto di Y , e che se f è chiusa allora l'immagine $f(X)$ è un chiuso di Y . Usare questi fatti per trovare esempi di applicazioni non aperte e non chiuse.

Esercizio 6. Sia $Y = \mathbb{R}$ con topologia cofinita, sia $X = \mathbb{R}^2$ e sia $\pi: X \rightarrow Y$ la proiezione sulla prima coordinata, cioè $\pi(x, y) = x$. Determinare se f è continua, nei casi seguenti:

- (1) se X è dotato della topologia cofinita;
- (2) se X è dotato della topologia euclidea;
- (3) se X è dotato della topologia di Zariski.

Esercizio 7. Sia X un insieme dotato della topologia banale, sia Y uno spazio topologico, e sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione. L'applicazione f è continua se e solo se anche Y ha topologia banale: vero o falso?

Esercizi sulla sezione **Spazi metrici**:

Esercizio 8. (1) Sia X uno spazio metrico, e siano p, q punti distinti di X . Dimostrare che esistono due aperti di X disgiunti, uno che contiene p e uno che contiene q .
(2) Dimostrare che uno spazio topologico con almeno due punti e topologia banale non è metrizzabile.

Esercizio 9. Sia (X, d) uno spazio metrico, siano $p \in X$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Consideriamo

$$C_\varepsilon(p) = \{x \in X \mid d(x, p) \leq \varepsilon\}.$$

- (1) Dimostrare che $C_\varepsilon(p)$ è chiuso in X rispetto alla topologia indotta da d .
- (2) Supponiamo X abbia almeno due punti, e che d sia una distanza per cui \mathcal{T}_d è la topologia discreta, ad esempio poniamo $d(x, y) = 1$ per ogni coppia di punti distinti x, y . Dimostrare che in questo caso

$$B_1(p) = \{p\}$$

e che

$$\overline{B_1(p)} = \{p\}$$

per ogni $p \in X$. Dimostrare inoltre che

$$C_1(p) = X$$

e concludere che non sempre $C_\varepsilon(p)$ è uguale alla chiusura di $B_\varepsilon(p)$.

Esercizio 10. Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo la *limitazione standard* \bar{d} di d nel modo seguente:

$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} d(x, y) & \text{se } d(x, y) < 1 \\ 1 & \text{se } d(x, y) \geq 1 \end{cases}$$

- (1) Dimostrare che \bar{d} è una distanza.
- (2) Dimostrare che $B_\varepsilon^{\bar{d}}(p) \supseteq B_\varepsilon^d(p)$ per ogni $p \in X$ e ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.
- (3) Dato $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, poniamo $\delta = \varepsilon$ se $\varepsilon < 1$ e invece $\delta = \frac{1}{2}$ se $\varepsilon \geq 1$. Dimostrare che $B_\delta^{\bar{d}}(p) \subseteq B_\varepsilon^d(p)$.
- (4) Dedurre dai punti precedenti che d e \bar{d} sono distanze equivalenti.

Esercizio 11. Sia $X = \mathbb{Q}$ e sia p un numero primo. Dati $x, y \in X$, scriviamo la differenza $z = x - y$ come

$$z = p^s \frac{a}{b}$$

dove $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ non sono divisibili per p , e $s \in \mathbb{Z}$. Poniamo allora

$$d(x, y) = p^{-s}.$$

se $x \neq y$, e poniamo invece $d(x, y) = 0$ se $x = y$. Questo definisce un'applicazione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Verificare che d è una distanza; è detta *distanza p -adica*.
- (2) Dimostrare che per ogni $x \in X$ e ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, ci sono elementi in $B_\varepsilon(x)$ di valore assoluto¹ arbitrariamente grande.
- (3) Dimostrare che la successione $p, p^2, p^3, \dots, x_n = p^n, \dots$ è una successione di Cauchy, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ per ogni scelta di n, m interi $\geq N$.

Esercizio 12. (da sapere) Sia (X, d) uno spazio metrico, fissiamo un sottoinsieme non vuoto qualsiasi $A \subseteq X$, e per ogni $x \in X$ definiamo la “distanza fra x e A ” nel modo seguente:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}.$$

Dimostrare che l'applicazione

$$d(-, A): \quad \begin{array}{ccc} X & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array}$$

è continua.

Esercizi sulla sezione **Sottospazi topologici**:

Esercizio 13. (da sapere) Sia X uno spazio topologico, siano $Y \subseteq X$ un sottoinsieme qualsiasi e sia $C \subseteq Y$. Dimostrare che C è chiuso in Y in topologia di sottospazio se e solo se esiste un chiuso $D \subseteq X$ di X tale che $D \cap Y = C$.

Esercizio 14. (da sapere) Siano X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un sottoinsieme. Sia \mathcal{B} una base della topologia su X . Dimostrare che l'insieme

$$\mathcal{B}' = \{D \cap Y \mid D \in \mathcal{B}\}$$

è una base della topologia di sottospazio su Y .

Esercizio 15. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, consideriamo il sottoinsieme $Y = [0, 1] \cup [2, 3]$ con topologia di sottospazio. Determinare se i seguenti sottoinsiemi di Y sono chiusi oppure aperti oppure entrambi, in ciascun caso determinando sottoinsiemi chiusi o aperti di X che abbiano intersezione con Y uguale agli insiemi dati:

- (1) $[0, 1[$,

¹Intendiamo il valore assoluto usuale dei numeri razionali.

(2) $]2, 3]$,

(3) $[\frac{1}{2}, 1[\cup \{2\}$.

Esercizio 16. (da sapere) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua fra spazi topologici, e sia $Z \subseteq X$ con topologia di sottospazio. Dimostrare che $f|_Z: Z \rightarrow Y$ è continua.

Esercizio 17. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea, e consideriamo il seguente sottoinsieme con topologia di sottospazio:

$$Y = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\}.$$

Determinare se Y ha topologia discreta.