Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.13

31.5.2023

Esercizi sulle sezioni riguardo alle **Superfici immerse in** $\mathbb{R}^3$:

Esercizio 1. Sia

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = \sqrt{(x^2 + y^2)} \right\}.$$

Dimostrare che S non è una superficie differenziabile immersa in $\mathbb{R}^3$. (*Suggerimento:* usare parametrizzazioni di Monge.)

Esercizio 2. Sia μ un numero reale positivo, e definiamo $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile immersa tramite la singola parametrizzazione

$$\psi(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), \mu u)$$

definita per $u \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}_{>0}$. Questa superficie si chiama *elicoide*. Calcolare X_u, X_v, E, F, G, $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$, K per la superficie S, e determinare di che tipo (ellittico, parabolico, ecc.) è il punto $\psi(u, v)$ per ogni u, v.

Esercizio 3. Calcolare le curvature principali del cilindro di raggio 1, parametrizzato da

$$\psi(u, v) = (u, \cos(v), \sin(v))$$

per $u \in \mathbb{R}$, $v \in]-\pi, \pi[$.

Esercizio 4. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile immersa in $\mathbb{R}^3$ e contenente l'origine $0 \in \mathbb{R}^3$. Supponiamo che S abbia intorno all'origine una parametrizzazione di Monge del tipo

$$(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

Usando questa parametrizzazione, calcolare in termini di f le matrici della prima e della seconda forma fondamentale, e la curvatura Gaußiana di S, nel punto $0 \in S$.

Esercizio 5. Sia $B = (b_{i,j})$ una matrice simmetrica 2×2, e definiamo $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile immersa con l'equazione

$$z = b_{1,1}x^2 + 2b_{1,2}xy + b_{2,2}y^2.$$

Usando la parametrizzazione di Monge naturale

$$(x, y) \mapsto \left(x, y, b_{1,1}x^2 + 2b_{1,2}xy + b_{2,2}y^2\right),$$

calcolare la matrice della seconda forma fondamentale di S nell'origine $0 \in \mathbb{R}^3$, e confrontarla con B.

Esercizio 6. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile immersa e connessa. Supponiamo che ogni punto di S sia ombelicale. Dimostrare che S è contenuta in un piano affine o in una sfera. (*Suggerimento:* sia L_p omotetia, cioè la moltiplicazione per λ; se $\lambda \neq 0$, allora considerare il punto $X + N/\lambda$.)

Esercizio 7. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie differenziabile immersa e compatta. Dimostrare che S ha almeno un punto ellittico. (*Suggerimento:* per ogni $p \in S$, si può supporre[1] che ogni $v \in T_pS$ sia il vettore velocità di una curva contenuta in un piano affine ortogonale a T_pS.)

[1] Svolgete l'esercizio assumendo questo fatto. Poi cercate di dimostrare anche questo fatto!