Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.12

26.5.2023

Esercizi sulle sezioni riguardo alle **Curve**:

Esercizio 1. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva in $\mathbb{R}^2$ parametrizzata a velocità unitaria, e supponiamo che la sua curvatura sia non nulla in $t_0 \in I$. Sia $\beta\colon I \to \mathbb{R}^2$ una curva contenuta in una circonferenza, tale che $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, $\alpha'(t_0) = \beta'(t_0)$, e con stessa curvatura di α in t_0. Dimostrare che gli sviluppi di Taylor di α e β intorno a t_0 coincidono fino al second'ordine.

Esercizio 2. Siano $r, \mu \in \mathbb{R}_{>0}$, poniamo $d = \sqrt{r^2 + \mu^2}$ e sia

$$\begin{array}{rccc} \alpha\colon & \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \left(r\cos\left(\frac{t}{d}\right), r\sin\left(\frac{t}{d}\right), \frac{\mu t}{d}\right). \end{array}$$

Verificare che α è una curva a velocità unitaria, e calcolare l'apparato di Frenet di α.

Esercizio 3. Trovare una parametrizzazione a velocità unitaria di

$$\alpha(t) = (e^t\cos(t), e^t\sin(t), e^t).$$

Esercizio 4. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva a velocità unitaria e derivata seconda mai nulla. Dimostrare che $\alpha(I)$ è contenuta in un piano affine di $\mathbb{R}^3$ se e solo se $\tau(t) = 0$ per ogni $t \in I$. (*Suggerimento:* Dato v ortogonale al piano affine, dimostrare che $(\alpha(t) - \alpha(s))$ e i vettori $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$ sono ortogonali a v per qualsiasi $s, t \in I$; viceversa, se $b(t)$ è costante allora il piano affine è ortogonale a $v = b(t)$.)

Esercizio 5. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva a velocità unitaria e derivata seconda mai nulla. Dimostrare che $\alpha(I)$ è contenuta in una circonferenza (in $\mathbb{R}^3$) se e solo se $\kappa(t)$ è costante e $\tau(t) = 0$ per ogni $t \in I$. (*Suggerimento:* se sono verificate queste ultime condizioni, il centro della circonferenza è $\alpha(t) + n(t)/\kappa(t)$ per qualsiasi $t \in I$.)

Esercizio 6. Siano[1] $\alpha, \beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ curve a velocità unitaria e derivate seconde non nulle in ogni $t \in I$. Supponiamo che $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ per un $t_0 \in I$, che le basi di Frenet delle due curve coincidano in t_0, e che α e β abbiano stessa curvatura e torsione in ogni punto di I. Dimostrare che $\beta = \alpha$.

Esercizio 7. Siano[2] $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ e $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^∞ da un intervallo aperto I in $\mathbb{R}$, con $\kappa(t) > 0$ per ogni $t \in I$. Siano $T, N, B\colon I \to \mathbb{R}^3$ tre applicazioni C^∞ che soddisfano le formule di Frenet in $\mathbb{R}^3$, e tali che $(T(t_0), N(t_0), B(t_0))$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ orientata positivamente per un $t_0 \in I$. Sia inoltre $F\colon I \to M_3(\mathbb{R})$ l'applicazione che associa a $t \in I$ la matrice $F(t)$ che ha per righe i vettori riga $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$.

(1) Dimostrare che $F'(t) = A(t) \cdot F(t)$ dove $A(t)$ è la matrice

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Sia ${}^{tr}F(t)$ la trasposta di $F(t)$. Dimostrare che la derivata di ${}^{tr}F(t) \cdot F(t)$ è uguale alla matrice nulla per ogni $t \in I$.

(3) Dimostrare che ${}^{tr}F(t) \cdot F(t)$ è la matrice identità per ogni $t \in I$.

(4) Dedurre dai punti precedenti che $(T(t), N(t), B(t))$ è una base ortonormale orientata positivamente per ogni $t \in I$.

---

[1] Questo esercizio è essenzialmente una riformulazione di risultati già visti a lezione. Scritto così dimostra la parte di "unicità" del teorema di classificazione vista a lezione delle curve in $\mathbb{R}^3$ tramite curvatura e torsione.

[2] Questo esercizio completa la dimostrazione del teorema di classificazione vista a lezione delle curve in $\mathbb{R}^3$ tramite curvatura e torsione.

(5) Dato $p_0 \in \mathbb{R}^3$, dimostrare che la formula

$$\alpha(t) = p_0 + \int_{t_0}^{t} T(s)ds$$

definisce una curva[3] a velocità unitaria α tale che $\alpha''(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$, con base di Frenet (T, N, B), curvatura κ e torsione τ.

[3]La notazione va spiegata: quell'integrale vuol dire una terna di numeri, dove ciascuno è l'integrale usuale di una delle componenti della funzione T.