Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.11

19.5.2023

Esercizi sulla sezione **Classificazione dei rivestimenti**:

Esercizio 1. Consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} (\{1/n\} \times \mathbb{R}).$$

Dimostrare che X non è localmente connesso per archi.

Esercizio 2. Sia $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$.

(1) Determinare tutti i sottogruppi non banali di $\pi_1(X)$ e per ciascun sottogruppo non banale H costruire un rivestimento $p\colon E \to X$ tale che $p_*(\pi_1(E)) = H$.
(2) Definire un rivestimento universale di X. (*Suggerimento:* lo spazio totale è $\mathbb{C}$, e l'applicazione è un'applicazione ben nota!)

Esercizio 3. Sia X l'unione di due circonferenze nel piano che si intersecano in un punto:

$$X = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \|q - (0,1)\| = 1\} \cup \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \|q + (0,1)\| = 1\}.$$

Siano α e β due cammini chiusi in X con punto base $x = (0,0)$, in modo tale che α percorre una volta in senso antiorario la circonferenza superiore in X, e β una volta in senso antiorario la circonferenza inferiore.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ l'unione dell'asse x con infinite circonferenze di raggio $1/3$, ciascuna tangente all'asse x in un punto ad ascissa intera:

$$E = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{q \in \mathbb{R}^2 \mid \|q - (n, 1/3)\| = 1/3\}.$$

(1) Definire un rivestimento $p\colon E \to X$ tale che $p_*(\pi_1(E, e))$ contiene $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$ ma non contiene $[\beta] \in \pi_1(X, x)$.
(2) Dimostrare che $p_*(\pi_1(E, e))$ contiene l'elemento

$$[\beta]^m \cdot [\alpha] \cdot [\beta]^{-m}$$

per ogni $m \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico dotato di rivestimento universale $p\colon E \to X$. Dato $x \in X$, dimostrare che esiste un intorno aperto U di x in X tale che valga:

(1) per ogni cammino chiuso $\alpha \in \Omega(U, x, x)$, il cammino α considerato come cammino in X è equivalente al cammino costante 1_x.
(2) l'applicazione $\iota_*\colon \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ è l'omomorfismo banale fra questi due gruppi, dove $\iota\colon U \to X$ è l'inclusione.

Uno spazio topologico che soddisfa la seconda condizione qui sopra per ogni $x \in X$ si dice *semilocalmente semplicemente connesso*.

Esercizio 5. (*difficile*) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme ottenuto unendo infinite circonferenze, tutte contenente l'origine e con i raggi che tendono a 0:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\| p - \left(\frac{1}{n}, 0\right) \right\| = \frac{1}{n} \right\}.$$

Dimostrare che X non ha alcun rivestimento universale.

Esercizi sulla sezione **Varietà topologiche e differenziabili**:

Esercizio 6. Descrivere un atlante del toro $T = S^1 \times S^1$ come varietà topologica.