Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.10

12.5.2023

Esercizi sulla sezione **Sollevamento di cammini e di omotopia**:

Esercizio 1. (**da sapere**) Sia $p\colon E \to X$ rivestimento. Supponiamo E non vuoto e connesso per archi, e X semplicemente connesso. Dimostrare che p è un omeomorfismo. (*Suggerimento:* va dimostrato che p è iniettiva, per questo dati $e, e' \in E$ con $x = p(e) = p(e')$, si prenda un cammino γ da e a e', e si osservi che γ solleva $p \circ \gamma$, mentre il cammino costante 1_a solleva il cammino costante 1_x.)

Esercizio 2. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, sia $f\colon S^2 \to X$ continua, siano $y \in S^2$ ed $e \in E$ tali che $p(e) = f(y)$. Dimostrare che esiste un unico sollevamento $g\colon S^2 \to E$ tale che $g(y) = e$. (*Suggerimento:* dimostrare che S^2 è omeomorfa a un quoziente del quadrato $[0,1]^2$, poi sfruttare i sollevamenti delle omotopie.)

Esercizio 3. (**da sapere**) Sia $x \in S^1$. Dimostrare che $\{x\}$ non è retratto per deformazione di S^1.

Esercizio 4. (**da sapere**) Consideriamo $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ e l'applicazione continua

$$\begin{array}{rccc} f\colon & [0,1] & \to & \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \\ & t & \mapsto & [\cos(\pi t), \sin(\pi t))]. \end{array}$$

Ricordiamo inoltre che S^1 è omeomorfo al quoziente di $[0,1]$ per la relazione di equivalenza che identifica i punti 0 e 1.

(1) Dimostrare che f passa al quoziente, inducendo un omeomorfismo $g\colon S^1 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.
(2) Dedurre che $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$.
(3) Consideriamo invece la proiezione solita $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$, e chiamiamo F la sua restrizione alla circonferenza $F\colon S^1 \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. Dato $p = (1,0) \in S^1$, descrivere l'omomorfismo di gruppi $F_*\colon \pi_1(S^1, p) \to \pi_1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}, [p])$ come omomorfismo $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Esercizio 5. Sia X il nastro di Möbius, costruito come a lezione come il quoziente del quadrato $[0,1]^2$ tramite una relazione d'equivalenza che identifica i punti di due lati "percorsi in senso opposto". Sia $B \subseteq X$ il bordo del nastro, cioè l'immagine in X degli altri due lati del quadrato.

(1) Dimostrare che B è omeomorfo a S^1, quindi $\pi_1(X)$ e $\pi_1(B)$ sono entrambi isomorfi a $\mathbb{Z}$.
(2) Sia $\iota\colon B \to X$ l'inclusione. Determinare $\iota_*\colon \pi_1(B) \to \iota(X)$ come omomorfismo di gruppi $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Esercizi sulla sezione **Teoremi di Borsuk e Brower**:

Esercizio 6. Dati $p, q \in D^2$ con $p \neq q$, sia $g(p,q)$ il punto di intersezione fra S^1 e la retta che contiene p e q, quello dal lato di p. Scrivere un'espressione esplicita di $g(p,q)$ e verificare che g è continua.

Esercizi sulla sezione **Fibre di rivestimenti e gruppi fondamentali**:

Esercizio 7. (**da sapere**) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ con $n \geq 2$, usando il rivestimento già visto $S^n \to \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 8. (**da sapere**) Dimostrare che il gruppo fondamentale della bottiglia di Klein non è abeliano, usando l'esercizio 6 del foglio 9.