

Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Foglio di esercizi n.1

3.3.2023

Esercizi sulla sezione **Introduzione**¹:

Esercizio 1. Dimostrare che il *disco chiuso*

$$D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è omeomorfo al “quadrato pieno chiuso”

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1], y \in [0, 1]\} = [0, 1] \times [0, 1].$$

Esercizio 2. Dimostrare che $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ e $Y = [0, 2]$ non sono omeomorfi, anche se abbiamo visto a lezione che esiste un’applicazione continua e biiettiva $f: X \rightarrow Y$. (*Suggerimento: dimostrare che una qualsiasi applicazione $g: Y \rightarrow X$ suriettiva non può essere continua, ad esempio usando risultati noti di analisi.*)

Esercizio 3. Usando la definizione usuale di sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , dimostrare che un qualsiasi $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto se e solo se il complementare $\mathbb{R}^n \setminus A$ è chiuso. Si usi qui la definizione per cui un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se contiene tutti i punti aderenti a C .

Esercizi sulla sezione **Spazi topologici e basi**:

Esercizio 4. Elencare tutte le topologie possibili su un insieme di cardinalità 2. Definire una topologia non banale e non discreta su un insieme di cardinalità 5.

Esercizio 5. (da sapere) Consideriamo le due famiglie seguenti di sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{B}_1 = \{B_\varepsilon(p) \mid p \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{]a, b[\times]c, d[\mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d\}.$$

Cioè \mathcal{B}_1 è la famiglia dei dischi aperti nel piano, con qualsiasi raggio e qualsiasi centro, e \mathcal{B}_2 è la famiglia dei “rettangoli aperti”, dove per rettangolo intendiamo un rettangolo “pieno”, non solo i 4 lati. Dimostrare che sono entrambe basi della topologia euclidea di \mathbb{R}^2 .

Esercizio 6. Poniamo

$$Z = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\},$$

e definiamo la famiglia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ nel modo seguente: $A \in \mathcal{B}$ se e solo se A è un intervallo aperto, oppure esiste un intervallo aperto $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A = B \setminus Z$. Dimostrare che \mathcal{B} è base di una topologia \mathcal{T} su \mathbb{R} , e trovare un aperto di \mathcal{T} che non è aperto in topologia euclidea.

Esercizio 7. (da sapere) Sia X un insieme qualsiasi, e consideriamo la famiglia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definita nel modo seguente: un sottoinsieme $A \subseteq X$ è in \mathcal{T} se e solo se $A = \emptyset$ oppure $X \setminus A$ è un insieme finito. Dimostrare che \mathcal{T} è una topologia, è detta topologia *cofinita*. Per quali insiemi X la topologia \mathcal{T} coincide con la topologia discreta?

Esercizio 8. Consideriamo la topologia cofinita su \mathbb{R} .

¹Per questi 3 esercizi si usino le definizioni usuali di applicazione continua fra sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , e di sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n .

- (1) Dato $A \subseteq X$ aperto in questa topologia, dimostrare che A è aperto anche in topologia euclidea.
- (2) Dati $p, q \in \mathbb{R}$ qualsiasi con $p \neq q$, dimostrare che non esistono due aperti (in topologia cofinita) disgiunti A, B tali che $p \in A$ e $q \in B$.
- (3) Dimostrare che invece in topologia euclidea due aperti del genere esistono per qualsiasi scelta di p e q .

Esercizio 9. Sia X un insieme dotato della topologia discreta, e sia \mathcal{B} una base della topologia. Dimostrare che $\{x\} \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 10. Sia K un campo.

- (1) Dimostrare che la topologia di Zariski su $K = K^1$ è la topologia cofinita.
- (2) Sia $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, e consideriamo la topologia di Zariski su $X = K^n$. Dato un polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, poniamo

$$V(f) = \{p \in K^n \mid f(p) = 0\}$$

e dato un sottoinsieme $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ poniamo

$$V(S) = \{p \in K^n \mid f(p) = 0 \forall f \in S\}.$$

Dimostrare che $C \subseteq K^n$ è chiuso se e solo se esiste un sottoinsieme $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ tale che $C = V(S)$.

- (3) Sia $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ un sottoinsieme qualsiasi, e sia $I = (S)$ l'ideale di $K[x_1, \dots, x_n]$ generato da S . Dimostrare che²

$$V(I) = V(S).$$

Esercizio 11. (da sapere) Sia $X = \mathbb{R}$ e consideriamo

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

- (1) Dimostrare che \mathcal{B} è base di una topologia su \mathbb{R} , detta *topologia di Sorgenfrey*.
- (2) Dimostrare che un qualsiasi intervallo aperto $]a, b[$ con $a < b$ (entrambi numeri reali) è aperto anche in topologia di Sorgenfrey.
- (3) Dimostrare che la topologia di Sorgenfrey è strettamente più fine della topologia euclidea.
- (4) Dimostrare che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, l'intervallo $]a, b[$ è aperto e anche chiuso in topologia di Sorgenfrey.

Esercizio 12. Sia (X, \leq) un insieme ordinato, e per ogni $a \in X$ si consideri

$$M_a = \{x \in X \mid a \leq x\}.$$

Dimostrare che la famiglia di sottoinsiemi

$$\{M_a \mid a \in X\}$$

è base di una topologia.

Esercizi sulla sezione **Parte interna, chiusura, intorni**:

Esercizio 13. (da sapere) Siano X spazio topologico e $D \subseteq X$. Dimostrare che D è denso se e solo se D interseca ogni aperto non vuoto di X .

Esercizio 14. Siano $X = \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Z}, a < b\}.$$

- (1) Dimostrare che \mathcal{B} è base di una topologia su X .
- (2) Determinare parte interna e chiusura dei sottoinsiemi $[0, 1[$ e $]1/2, 5/2[$ rispetto a questa topologia.

Esercizio 15. Consideriamo $X = \mathbb{R}$ con topologia cofinita. Determinare la chiusura di $[0, 1]$ rispetto a questa topologia.

²Se sapete cos'è il radicale \sqrt{I} di I , vi esorto a dimostrare anche che $V(I) = V(\sqrt{I})$.

Esercizio 16. In topologia cofinita, ogni sottoinsieme dello spazio topologico è denso: vero o falso?

Esercizio 17. (da sapere) Dimostrare che, in uno spazio topologico, un sottoinsieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

Esercizio 18. Sia X uno spazio topologico, sia $x \in X$, e sia $U \subseteq X$ un intorno di x .

(1) Dato V un sottoinsieme di X contenente U , dimostrare che anche V è un intorno di x .

(2) Dato U' un altro intorno di x , dimostrare che $U \cup U'$ e $U \cap U'$ sono anch'essi intorni di x .

Esercizio 19. (da sapere) Sia X uno spazio topologico, sia $x \in X$ e sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme. Sia inoltre J un sistema fondamentale di intorni di x . Dimostrare che $x \in \overline{D}$ se e solo se $U \cap D \neq \emptyset$ per ogni $U \in J$.

Esercizio 20. Sia $X = \mathbb{R}$ con topologia euclidea. Determinare quali dei seguenti sono sistemi fondamentali di intorni del punto $0 \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{J}_1 = \{]-n, n[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \};$$

$$\mathcal{J}_2 = \left\{ \left[-\frac{1}{n}, \frac{7}{n} \right[\mid n \in \mathbb{Z}_{>0} \right\};$$

$$\mathcal{J}_3 = \{]-\varepsilon, \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \mid \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \}.$$