Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Esame scritto

12.7.2023

SOLUZIONI

Esercizio 1. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{\ ]a, b[\ \times\ ]a, b[\ \mid\ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Dimostrare che esiste una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}^2$ che ha $\mathcal{B}$ come base.
(2) Determinare la parte interna di

$$A = \ ]-1, 0[\ \times\ ]0, 1[$$

nello spazio topologico $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$.
(3) Sia

$$Y = \{(-x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

la diagonale del secondo e del quarto quadrante, con la topologia di sottospazio di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$. Dimostrare che Y non è di Hausdorff.

Soluzione esercizio 1. (1) Verifichiamo le ipotesi di una proposizione (vista a lezione) che assicura l'esistenza di $\mathcal{T}$:
(a) tutto $\mathbb{R}^2$ si deve poter scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$;
(b) l'intersezione di due elementi qualsiasi di $\mathcal{B}$ si deve poter scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

La prima condizione è vera, basta osservare l'uguaglianza

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\ ]-n, n[\ \times\ ]-n, n[\ ).$$

La seconda condizione è vera, perché dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ l'intersezione

$$(\ ]a, b[\ \times\ ]a, b[\ ) \cap (\ ]c, d[\ \times\ ]c, d[\ )$$

è vuota (e allora è l'unione della sottofamiglia vuota di $\mathcal{B}$), oppure è uguale a

$$]e, f[\ \times\ ]e, f[$$

dove $e = \max\{a, c\}$ e $f = \min\{b, d\}$ (supponendo $e < f$). In questo caso l'intersezione è proprio un elemento di $\mathcal{B}$. Concludiamo che $\mathcal{T}$ esiste.

(2) La parte interna di A è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A. Ciascuno di questi aperti è unione di elementi di $\mathcal{B}$, quindi cerchiamo intanto di capire quali elementi di $\mathcal{B}$ sono contenuti in A. Un elemento qualsiasi B di $\mathcal{B}$ è del tipo

$$B = \ ]a, b[\ \times\ ]a, b[$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, e $a < b$ perché B sia non vuoto. Se abbiamo $B \subseteq A$ con B non vuoto allora deve valere

$$-1 < a < b < 0$$

che segue dal confrontare le ascisse dei punti di A e di B. Ma deve valere anche

$$0 < a < b < 1$$

confrontando le ordinate dei punti di A e di B. È impossibile che siano verificate entrambe queste sequenze di disuguaglianze, per cui è impossibile avere un elemento non vuoto di $\mathcal{B}$ contenuto in A. Segue:

$$A^\circ = \varnothing.$$

(3) Consideriamo il punto $p = (-1, 1) \in Y$ e descriviamo gli aperti di Y che contengono p, in topologia di sottospazio. Dato un aperto siffatto $V \subseteq Y$, esiste un aperto U di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ tale che

$$V = Y \cap U.$$

Anche U deve contenere p, e U è unione degli elementi della base $\mathcal{B}$. Almeno uno di questi elementi di $\mathcal{B}$ conterrà p, quindi esistono numeri reali $a < b$ tali che

$$p \in \,]a, b[\, \times \,]a, b[\, \subseteq U.$$

L'ascissa di p è -1, quindi deve valere $a < -1 < b$, l'ordinata di p è 1 quindi deve valere $a < 1 < b$. Deduciamo che a è negativo e b è positivo. Da questo segue che $]a, b[\, \times \,]a, b[$ contiene l'origine $(0, 0) \in Y$, quindi anche U e anche V contengono $(0, 0)$.

In conclusione, ogni aperto V di Y contenente $p \in Y$ contiene anche $(0, 0) \in Y$, per cui Y non è di Hausdorff.

Esercizio 2. Dato n un intero positivo, consideriamo il seguente sottoinsieme[1] di $\mathbb{C}^n$:

$$F_n = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{il polinomio } z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \\ \text{ha almeno una radice di modulo } \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Dimostrare che

(1) F_n è immagine di un chiuso di $\mathbb{C}^{n+1}$ tramite la proiezione $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ sulle prime n coordinate;
(2) F_n non è compatto se $n > 1$;
(3) F_n è chiuso in $\mathbb{C}^n$.

Soluzione esercizio 2. (1) Dato il disco chiuso nel piano complesso

$$D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leq 1\}$$

definiamo

$$C_n = \{(a_1, \ldots, a_n, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \lambda \in D^2,\ \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0\}.$$

Si tratta di un chiuso in $\mathbb{C}^{n+1}$, infatti C_n è l'intersezione di

$$\mathbb{C}^n \times D^2$$

(che è chiuso in $\mathbb{C}^{n+1}$ perché D^2 è chiuso in $\mathbb{C}$) e di

$$\{(a_1, \ldots, a_n, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0\}$$

(che è chiuso in $\mathbb{C}^{n+1}$ essendo il luogo degli zeri di una funzione continua).

Sia $\pi \colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ la proiezione sulle prime n coordinate, e consideriamo $\pi(C_n)$. Abbiamo $\pi(C_n) \subseteq F_n$, perché se $(a_1, \ldots, a_n, \lambda)$ è in C_n allora il polinomio $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ ha almeno una radice di modulo ≤ 1, cioè λ. Quindi $\pi(a_1, \ldots, a_n, \lambda) = (a_1, \ldots, a_n)$ è in F_n, da cui deduciamo $\pi(C_n) \subseteq F_n$.

Viceversa, se $(a_1, \ldots, a_n)$ è in F_n basta porre λ uguale a una radice di modulo ≤ 1 del polinomio $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$, e allora il punto $(a_1, \ldots, a_n, \lambda)$ di C_n si proietta sul punto $(a_1, \ldots, a_n)$. Segue $F_n \subseteq \pi(C_n)$, da cui $F_n = \pi(C_n)$.

(2) Se $n > 1$, per ogni $a \in \mathbb{C}$ il punto $(a, 0, \ldots, 0)$ è in F_n. Infatti il polinomio

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

in questo caso è

$$z^n + a z^{n-1} + 0 z^{n-2} + \ldots + 0 z + 0 = z^n + a z^{n-1} = z^{n-1}(z + a)$$

che ha $0 \in \mathbb{C}$ come radice, visto che $n > 1$. Quindi F_n non è limitato, per cui non è compatto.

(3) Osserviamo che C_n è anche contenuto ed è chiuso nel prodotto

$$\mathbb{C}^n \times D^2.$$

Il fattore D^2 è compatto, quindi la proiezione

$$p \colon \mathbb{C}^n \times D^2 \to \mathbb{C}^n$$

[1] Come al solito, se non specifichiamo la topologia su $\mathbb{C}^n$ allora intendiamo la topologia euclidea.

sul primo fattore è un'applicazione chiusa. Quindi $F_n = p(C_n) = \pi(C_n)$ è immagine di un chiuso tramite un'applicazione chiusa, per cui F_n è chiuso in $\mathbb{C}^n$.

Esercizio 3. Siano $L, C \subseteq \mathbb{R}^3$ una retta e una circonferenza, per esempio

$$L = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}, \qquad C := \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

(1) Dimostrare che $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L) \cong \mathbb{Z}$.
(2) Dimostrare che $\pi_1(\mathbb{R}^3 \smallsetminus (C \cup L)) \cong \mathbb{Z}^2$.
(3) Dimostrare che $(\mathbb{R}^3 \smallsetminus L)$ e $(\mathbb{R}^3 \smallsetminus (C \cup L))$ *non* sono omotopicamente equivalenti.

Soluzione esercizio 3. (1) Sia

$$P = \big(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}\big) \times \{0\}$$

il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ dato dal piano xy a cui abbiamo tolto l'origine. Dimostriamo che P è retratto per deformazione di $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus L$, basta definire una deformazione che schiaccia tutto X nella direzione dell'asse z, fino ad ottenere P:

$$\begin{array}{rccc} R\colon & X \times [0,1] & \to & X \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,tz) \end{array}$$

Sappiamo che P è omeomorfo a $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$, e che quest'ultimo ha S^1 come retratto per deformazione, ad esempio tramite la deformazione

$$\begin{array}{rccc} D\colon & (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}) \times [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\} \\ & (x,y) & \mapsto & t(x,y) + (1-t)\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} \end{array}$$

Quindi X, P, $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$ e S^1 hanno tutti gruppo fondamentale isomorfo, per la precisione a $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$.

(2) Diamo due possibili svolgimenti.

(a) Primo svolgimento. L'insieme $Y = \mathbb{R}^3 \smallsetminus (C \cup L)$ è omeomorfo a

$$(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}) \times S^1.$$

Per visualizzare in modo intuitivo questo omeomorfismo si può pensare Y come "solido di rotazione", ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z il semipiano xz con la $x > 0$ privato del punto $(1,0,0)$. L'asse di rotazione è proprio la retta L, e il punto $(1,0,0)$ ruotando descrive la circonferenza C. Infine un semipiano aperto privato di un punto è omeomorfo a tutto il piano privato di un punto, basta usare su una delle coordinate l'esponenziale che è un omeomorfismo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$.
Per essere precisi diamo un omeomorfismo esplicito. Descriviamo i punti di S^1 come (c,s) dove $c = \cos(2\pi t)$, $s = \sin(2\pi t)$ per $t \in \mathbb{R}$, e definiamo

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}) \times S^1 & \to & Y \\ & ((a,b),(c,s)) & \mapsto & (e^a c, e^a s, b) \end{array}$$

Per dimostrare che φ è un omeomorfismo basta scrivere l'inversa, considerando che e^a è la norma di $(e^a c, e^a s)$ e che (c,s) è il normalizzato di $(e^a c, e^a s)$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}\colon & Y & \to & (\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}) \times S^1 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \left(\left(\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), z\right), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right) \end{array}$$

La formula che abbiamo scritto è facilmente continua e sarebbe definita in realtà su $\mathbb{R}^3 \smallsetminus L$, cioè imponendo solo $\sqrt{x^2+y^2} > 0$. Da questo è facile verificare che l'immagine di φ^{-1} per come l'abbiamo scritta è proprio $(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}) \times S^1$ considerando che Y non contiene punti (x,y,z) tali che $z = 0$ e $x^2 + y^2 = 1$.
Il gruppo fondamentale di $(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}) \times S^1$ è il prodotto diretto di $\pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\})$ e di $\pi_1(S^1)$, cioè è isomorfo al prodotto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.

(b) Svolgimento alternativo. Dimostriamo che il toro $S^1 \times S^1$ è retratto per deformazione di $Y = \mathbb{R}^3 \smallsetminus (C \cup L)$. Realizziamo il toro come il sottoinsieme $T \subseteq \mathbb{R}^3$ ottenuto facendo ruotare attorno all'asse z la circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$ e centro $(1,0,0)$, circonferenza contenuta nel piano xz.

Possiamo descrivere questo toro nel modo seguente. Dati due angoli ϑ e ω, chiamiamo per brevità $c = \cos(\vartheta)$, $s = \sin(\vartheta)$, $a = \cos(\omega)$, $b = \sin(\omega)$. Al variare di ϑ, il punto

$$(c, s, 0)$$

descrive la circonferenza C; un punto sul toro si trova aggiungendo a $(c, s, 0)$ un vettore di lunghezza $\frac{1}{2}$ sul piano generato da $(c, s, 0)$ e da $(0, 0, 1)$, in modo che formi un angolo ω con $(c, s, 0)$. Cioè un punto sul toro è

$$(c, s, 0) + \frac{1}{2}(a(c, s, 0) + b(0, 0, 1))$$

In altre parole il toro che stiamo considerando è il sottoinsieme

$$T = \left\{ (c, s, 0) + \frac{1}{2}(a(c, s, 0) + b(0, 0, 1)) \;\middle|\; c, s, a, b \in \mathbb{R}, c^2 + s^2 = 1, a^2 + b^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Come verifica, diamo un omeomorfismo fra T e $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$: basta mandare la coppia $((c, s), (a, b)) \in S^1 \times S^1$ proprio in $(c, s, 0) + \frac{1}{2}(a(c, s, 0) + b(0, 0, 1))$. Si tratta di un'applicazione chiaramente continua, si verifica facilmente che è biiettiva dal compatto $S^1 \times S^1$ nell'Hausdorff T, quindi è un omeomorfismo.
Definiamo esplicitamente una deformazione $R\colon Y \times [0, 1] \to Y$. Per preparare la formula finale, prendiamo un punto qualsiasi $p = (x, y, z) \in Y$ e determiniamo dove deve andare a finire p sul toro. Il punto più vicino a p sulla circonferenza C è il punto

$$q = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right)$$

perché "visti dall'alto" (cioè proiettati sul piano xy) q è semplicemente p normalizzato, e q ha 0 come terza coordinata.
Il vettore da q a p è

$$v = p - q = \left(x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), y \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), z \right)$$

Per arrivare sulla superficie del toro, devo partire da q e procedere in direzione v (cioè da q verso p) per una distanza pari a $\frac{1}{2}$, quindi il punto che ci interessa sul toro è

$$\hat{p} = q + \frac{v}{2\|v\|}.$$

Si vede subito che $\hat{p}$ è sul toro T, basta porre

$$c = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad s = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad (a, b) = \frac{v}{\|v\|}.$$

La deformazione si può scrivere allora nel modo seguente

$$\begin{array}{rccc} R\colon & Y \times [0, 1] & \to & Y \\ & (p, t) & \mapsto & tp + (1 - t)\hat{p} \end{array}$$

Verifichiamo che è definita in tutti i punti di Y: per esserlo, intanto dobbiamo avere $x^2 + y^2 > 0$ il che è vero perché Y non contiene punti di L. Poi dobbiamo avere $v \neq 0$, cioè $p \neq q$, ma se $p = q$ allora p è sulla circonferenza C (perché q evidentemente lo è), e invece Y non contiene punti di C.
Quindi R è ben definita, e anche ovviamente continua viste le formule che stiamo dando. Dalla formula di R è anche chiaro che per $t = 1$ si tratta dell'identità su Y, e che per $t = 0$ va da Y a T. Rimane da verificare che se p è già sul toro allora $R(p, t) = p$ per ogni t, cioè verifichiamo che se $p \in T$ allora $p = \hat{p}$.
Se $p \in T$ allora p si scrive come

$$p = (c, s, 0) + \frac{1}{2}(a(c, s, 0) + b(0, 0, 1)) = \left(c \left(1 + \frac{a}{2} \right), s \left(1 + \frac{a}{2} \right), \frac{b}{2} \right)$$

per certi valori di c, s, a, b. Il punto q è il normalizzato di

$$\left(c \left(1 + \frac{a}{2} \right), s \left(1 + \frac{a}{2} \right), 0 \right) = \left(1 + \frac{a}{2} \right) \cdot (c, s, 0)$$

e questo normalizzato è semplicemente

$$q = (c, s, 0).$$

Infine abbiamo

$$v = p - q = \frac{1}{2}(a(c, s, 0) + b(0, 0, 1))$$

I vettori $(c, s, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono ortogonali e hanno norma 1, quindi

$$\|v\| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}$$

da cui segue

$$\hat{p} = q + \frac{v}{2\|v\|} = q + \frac{v}{2\frac{1}{2}} = q + v = p$$

che vale se $p \in T$. Questo completa la verifica che R è effettivamente una deformazione di Y su T.

Deduciamo che $\pi_1(Y)$ è isomorfo a $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.

(3) Due spazi topologici omotopicamente equivalenti hanno sicuramente gruppi fondamentali isomorfi. Nei due punti precedenti abbiamo visto che un gruppo fondamentale è isomorfo a $\mathbb{Z}$, e l'altro è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$.

Come ripasso di algebra, spieghiamo perché questi due gruppi (additivi) non sono isomorfi: ad esempio perché $\mathbb{Z}$ è ciclico, generato ad esempio dall'elemento $1 \in \mathbb{Z}$, invece $\mathbb{Z}^2$ non è ciclico. Infatti dato un qualsiasi elemento $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ il sottogruppo generato da (n, m) è l'insieme di tutti i suoi multipli interi

$$\{\ldots, (-2n, -2m), (-n, -m), (0, 0), (n, m), (2n, 2m), (3n, 3m), \ldots\}$$

che chiaramente non può essere tutto $\mathbb{Z}^2$.

Esercizio 4. Consideriamo il toro $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ con punto base $p_0 = ((1, 0), (1, 0)) \in S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Dato un cammino chiuso $\alpha \in \Omega(\mathbb{T}^2, p_0, p_0)$ denotiamo con α_1 e α_2 le sue componenti, cioè per ogni $t \in [0, 1]$ gli elementi $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ sono i punti di S^1 tali che $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. Denotiamo inoltre con $\alpha^\vee$ il cammino $t \mapsto (\alpha_2(1 - t), \alpha_1(t))$.

(1) Dimostrare che $[\alpha]$ è uguale all'elemento neutro $[1_{p_0}]$ di $\pi_1(\mathbb{T}^2, p_0)$ se e solo se $[\alpha^\vee] = [1_{p_0}]$.
(2) Dimostrare che $[\alpha] \neq [\alpha^\vee]$ se $[\alpha] \neq [1_{p_0}]$.

Soluzione esercizio 4. (1) Diamo due possibili svolgimenti.

(a) Ricordiamo che $\pi_1(S^1 \times S^1)$ è isomorfo a $\pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$ tramite l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) & \to & \pi_1(S^1 \times S^1) \\ ([\alpha_1], [\alpha_2]) & \mapsto & [\alpha] \end{array}$$

dove α_1 e α_2 sono le componenti di α. Il cammino $\alpha^\vee$ ha per componenti $i(\alpha_2)$ e α_1, quindi la classe $[\alpha^\vee]$ corrisponde all'elemento $([i(\alpha_2)], [\alpha_1])$ di $\pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$.

Se $[\alpha]$ è uguale all'elemento neutro $[1_{p_0}]$, allora $[\alpha_1]$ è uguale all'elemento neutro $[1_{(1,0)}]$ di $\pi_1(S^1)$ e anche $[\alpha_2]$ è uguale all'elemento neutro $[1_{(1,0)}]$. Quindi anche l'inverso $[i(\alpha_2)]$ è uguale a $[1_{(1,0)}]$, quindi

$$([i(\alpha_2)], [\alpha_1]) = ([1_{(1,0)}], [1_{(1,0)}])$$

da cui

$$[\alpha^\vee] = [1_{p_0}]$$

grazie all'isomorfismo ricordato sopra. Viceversa, se $[\alpha^\vee]$ è uguale all'elemento neutro $[1_{p_0}]$ allora otteniamo $[\alpha] = [1_{p_0}]$ in modo analogo.

(b) Supponiamo $[\alpha] = [1_{p_0}]$, cioè $\alpha \sim 1_{p_0}$, e sia $F\colon [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{T}^2$ un'omotopia di cammini da α al cammino costante 1_{p_0}. Cioè

$$F(t, 0) = \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \qquad F(t, 1) = p_0 = ((1, 0), (1, 0))$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Scriviamo le due componenti di F:

$$F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$$

con $F_i(t,s) \in S^1$ per ogni $t,s \in [0,1]$ e per ogni i. Definiamo poi

$$\begin{array}{rccc} G\colon & [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{T}^2 \\ & (t,s) & \mapsto & (F_2(1-t,s), F_1(t,s)) \end{array}$$

Vale

$$G(t,0) = (\alpha_2(1-t), \alpha_1(t)) = \alpha^\vee(t), \qquad G(t,1) = (F_2(1-t,1), F_1(t,1)) = p_0$$

dove la seconda uguaglianza è vera perché $F_1(t,1) = F_2(t,1) = (1,0)$ per ogni $t \in [0,1]$. Cioè G è un'omotopia di cammini da $\alpha^\vee$ a 1_{p_0}, quindi vale $[\alpha^\vee] = [1_{p_0}]$.
Viceversa, supponiamo $[\alpha^\vee] = [1_{p_0}]$ cioè $\alpha^\vee \sim 1_{p_0}$, e sia $G\colon [0,1]\times[0,1] \in \mathbb{T}^2$ un'omotopia di cammini da $\alpha^\vee$ a 1_{p_0}. In modo simile a prima definiamo

$$\begin{array}{rccc} F\colon & [0,1]\times[0,1] & \to & \mathbb{T}^2 \\ & (t,s) & \mapsto & (G_2(t,s), G_1(1-t,s)) \end{array}$$

in modo tale da avere

$$G(t,0) = \alpha^\vee(t) = (\alpha_2(1-t), \alpha_1(t)) = (G_1(t,0), G_2(t,0))$$

e

$$F(t,0) = (G_2(t,0), G_1(1-t,0)) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = \alpha(t)$$

cioè F è un'omotopia di cammini da α a 1_{p_0}, da cui $[\alpha] = [1_{p_0}]$.

(2) Diamo due possibili svolgimenti.

(a) Primo svolgimento: usiamo di nuovo l'isomorfismo standard fra $\pi_1(S^1 \times S^1)$ e $\pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$. Stiamo supponendo $[\alpha] \neq [1_{p_0}]$, quindi

$$([\alpha_1], [\alpha_2]) \neq ([1_{(1,0)}], [1_{(1,0)}])$$

e dobbiamo dimostrare $[\alpha] \neq [\alpha^\vee]$. Supponiamo per assurdo $[\alpha] = [\alpha^\vee]$, cioè

$$([i(\alpha_2)], [\alpha_1]) = ([\alpha_1], [\alpha_2])$$

da cui

$$[i(\alpha_2)] = [\alpha_2]^{-1} = [\alpha_1], \qquad [\alpha_1] = [\alpha_2]$$

che implica

$$[\alpha_2]^{-1} = [\alpha_2]$$

che è un'uguaglianza fra elementi di $\pi_1(S^1)$. Questo gruppo è isomorfo a $\mathbb{Z}$, nel quale l'unico elemento uguale al suo opposto (in notazione additiva) è l'elemento neutro $0 \in \mathbb{Z}$. Quindi in $\pi_1(S^1)$ l'unico elemento uguale al suo inverso (in notazione moltiplicativa) è l'elemento neutro $[1_{(1,0)}]$, da cui

$$[1_{(1,0)}] = [\alpha_2] = [\alpha_1]$$

che implica $[\alpha] = [1_{p_0}]$: assurdo.

(b) Secondo svolgimento. Usiamo il rivestimento $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ dato da

$$p\colon (t_1,t_2) \mapsto ((\cos(2\pi t_1), \sin(2\pi t_1)), (\cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2)))$$

Abbiamo visto a lezione che il toro è omeomorfo al quoziente $\mathbb{R}^2/G$ dove G è il gruppo delle traslazioni di $\mathbb{R}^2$ per elementi di $\mathbb{Z}^2$. L'omeomorfismo solito non fa altro che prendere una classe $[t_1, t_2]$ modulo $\mathbb{Z}^2$ di un punto $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2$ e associarle la coppia

$$((\cos(2\pi t_1), \sin(2\pi t_1)), (\cos(2\pi t_2), \sin(2\pi t_2))) \in S^1 \times S^1.$$

(Per ripasso, si vede subito che questo è ben definito, e che è una biiezione continua dal compatto $\mathbb{R}^2/G$ all'Hausdorff $\mathbb{T}^2$.)
Da questo punto di vista il rivestimento p è semplicemente un altro modo di scrivere il quoziente $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G$, che è un rivestimento perché G agisce su $\mathbb{R}^2$ in modo propriamente discontinuo.
Dato α come nell'esercizio, solleviamolo a un cammino in $\mathbb{R}^2$ partendo dall'origine $(0,0)$. Invece di usare la solita notazione, denotiamo il sollevamento con $\widetilde{\alpha}$ per semplicità.
La classe $[\alpha]$ non è banale, quindi α non è equivalente a 1_{p_0}. I loro sollevati partendo da $(0,0)$ sono $\widetilde{\alpha}$ e $1_{(0,0)}$ rispettivamente, e per loro ci sono due possibilità: o hanno gli stessi estremi e non sono equivalenti, oppure non hanno gli stessi estremi cioè $\widetilde{\alpha}$ non è

un cammino chiuo. Visto che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso tutti i cammini chiusi sono equivalenti, per cui per forza il sollevamento $\widetilde{\alpha}$ non è chiuso. Cioè il suo punto finale

$$\widetilde{\alpha}(1) = (a, b)$$

non è uguale al punto iniziale $(0, 0)$. Però α è un cammino chiuso, quindi (a, b) dev'essere equivalente a $(0, 0)$ modulo G, cioè $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$.
Denotiamo con $\widetilde{\alpha}_1(t)$ e $\widetilde{\alpha}_2(t)$ le due componenti di $\widetilde{\alpha}$, e ricordiamo che

$$p \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$$

cioè

$$p(\widetilde{\alpha}_1(t), \widetilde{\alpha}_2(t)) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

per ogni $t \in [0, 1]$.
Facciamo la stessa cosa con $\alpha^\vee$, considerando il suo sollevamento $\widetilde{\alpha}^\vee$ che parte da $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Cerchiamo di capire dove finisce $\widetilde{\alpha}^\vee$. Dalla definizione di p segue subito che

$$p(\widetilde{\alpha}_2(1-t), \widetilde{\alpha}_1(t)) = (\alpha_2(1-t), \alpha_1(t)) = \alpha^\vee(t)$$

quindi il cammino γ in $\mathbb{R}^2$ dato da

$$\gamma \colon t \mapsto (\widetilde{\alpha}_2(1-t), \widetilde{\alpha}_1(t))$$

è esso stesso un sollevamento di $\alpha^\vee$. Non è detto però che questo sollevamento parta da $(0, 0)$, anzi partirà da

$$(\widetilde{\alpha}_2(1), \widetilde{\alpha}_1(0))$$

che è uguale al punto $(b, 0)$, perché valgono

$$\widetilde{\alpha}(0) = (\widetilde{\alpha}_1(0), \widetilde{\alpha}_2(0)) = (0, 0), \qquad \widetilde{\alpha}(1) = (\widetilde{\alpha}_1(1), \widetilde{\alpha}_2(1)) = (a, b).$$

Come si ottiene $\widetilde{\alpha}^\vee$, che parte invece da $(0, 0)$? Sfruttiamo il fatto seguente: traslando per numeri interi sulla x e sulla y un sollevamento di $\alpha^\vee$, otteniamo un altro sollevamento dello stesso cammino $\alpha^\vee$. Cioè anche

$$\eta(t) = (\widetilde{\alpha}_2(1-t) - b, \widetilde{\alpha}_1(t))$$

è un sollevamento di $\alpha^\vee$, perché è ottenuto da γ traslando tutto di $-b$ sulla x.
In effetti vale

$$\eta(1) = (\widetilde{\alpha}_2(1-t) - b, \widetilde{\alpha}_1(t)) = (b - b, 0) = (0, 0)$$

quindi η è il sollevamento di $\alpha^\vee$ partendo da $(0, 0)$, cioè $\eta = \widetilde{\alpha}^\vee$.
Ora possiamo vedere dove finisce $\widetilde{\alpha}^\vee$: è il punto

$$\widetilde{\alpha}^\vee(1) = \eta(1) = (\widetilde{\alpha}_2(1-1) - b, \widetilde{\alpha}_1(1)) = (-b, a).$$

Sappiamo che $\alpha \sim \alpha^\vee$ se e solo se i sollevamenti $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\alpha}^\vee$ finiscono nello stesso punto e sono equivalenti. Ma uno finisce in $(a, b) \neq (0, 0)$, invece l'altro finisce in $(-b, a)$ che è diverso da (a, b). Quindi $\alpha \not\sim \alpha^\vee$, cioè $[\alpha] \neq [\alpha^\vee]$.

Esercizio 5. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto contenente un punto (a, b) e $\varphi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(a, b) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(a, b) = 0.$$

Sia S la superficie in $\mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto & (u, v, \varphi(u, v)) \end{array}$$

(1) Dare una formula per la curvatura gaußiana di S nel punto $p = (a, b, \varphi(a, b))$ (va dimostrata la validità della formula).
(2) Ora supponiamo che la curvatura gaußiana di S in p sia (strettamente) positiva. Dimostrare che esiste un intorno $D \subseteq \Omega$ di (a, b) tale che $\varphi(u, v) \neq \varphi(a, b)$ per ogni $(u, v) \in (D \setminus \{(a, b)\})$.

Soluzione esercizio 5. (1) Usiamo le solite notazioni del corso, ponendo $X = \varphi(u,v)$. Calcoliamo

$$X_u = \left(1, 0, \frac{\partial\varphi}{\partial u}\right), \qquad X_v = \left(0, 1, \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

$$E = 1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad G = 1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2,$$

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2,$$

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u}, -\frac{\partial\varphi}{\partial v}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u}, -\frac{\partial\varphi}{\partial v}, 1\right)\right\|} = \frac{\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial u}, -\frac{\partial\varphi}{\partial v}, 1\right)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\mathcal{L} = N \cdot X_{uu} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$$

$$\mathcal{M} = N \cdot X_{uv} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}$$

$$\mathcal{N} = N \cdot X_{vv} = N \cdot \left(0, 0, \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}$$

da cui

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = \frac{\det(H\varphi)}{(EG-F^2)^2}$$

dove $H\varphi$ è l'Hessiano di φ, cioè la matrice delle derivate parziali di ordine 2.

Nel punto (a,b) le derivate parziali di ordine 1 di φ sono nulle, quindi in questo punto vale

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1, \qquad K = \det(H\varphi).$$

(2) Dalle formule precedenti otteniamo che nel punto (a,b) il determinante dell'Hessiano di φ è strettamente positivo. A questo punto ci siamo ridotti a un esercizio facile di analisi, per completezza vediamone un possibile svolgimento.

L'Hessiano di φ in (a,b) è una matrice simmetrica 2×2 reale. È definita positiva o definita negativa, perché ha determinante positivo. Quindi ha due autovalori entrambi positivi o entrambi negativi, oppure un solo autovalore non nullo. Dalla teoria delle forme bilineari simmetriche reali segue che $H\varphi(a,b)$ è congruente a

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oppure a

$$-I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tramite una matrice invertibile di cambio di coordinate M.

Considiamo $u - a$ e $v - b$ come le variabili e applichiamo ad esse il cambio lineare di coordinate prescritto da M. L'Hessiano di φ in (a,b) si trasforma nella matrice I_2 oppure nella matrice $-I_2$. Dopo il cambio di coordinate, mantenendo per semplicità gli stessi simboli u, v, a, b di prima, lo sviluppo di Taylor di φ in (a,b) si scrive

$$\varphi(u,v) = \varphi(a,b) + \frac{\pm 1}{2}\left((u-a)^2 + (v-b)^2\right) + (\text{termini di ordine superiore a 2}).$$

Più precisamente si può scegliere $\sigma \in \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ tale che

$$\Psi(u,v) = \frac{\varphi(u,v) - \varphi(a,b) - \sigma\left((u-a)^2 + (v-b)^2\right)}{(u-a)^2 + (v-a)^2}$$

è una funzione continua e vale 0 in (a,b).

Supponiamo per assurdo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un punto $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \Omega \smallsetminus \{(a,b)\}$ a distanza $< \varepsilon$ da (a,b) e tale che $\varphi(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = \varphi(a,b)$. Allora

$$\Psi(u_\varepsilon, v_\varepsilon) = -\sigma,$$

da cui per continuità di Ψ segue

$$\Psi(a,b) = -\sigma \neq 0$$

che è assurdo. Quindi esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $(u,v) \in \Omega \setminus \{(a,b)\}$ a distanza $< \varepsilon$ da (a,b) si ha $\varphi(u,v) \neq \varphi(a,b)$. Basta porre allora $D = B_\varepsilon(a,b)$.