Corso di Geometria 2

Docenti: Guido Pezzini, Daniele Valeri

a.a. 2022/2023

Esame scritto

15.6.2023

SOLUZIONI

Esercizio 1. Di ciascuna delle seguenti affermazioni determinare se è vera o falsa, *motivando la risposta*:

(1) Se X è uno spazio topologico discreto, allora $X \times Y$ è uno spazio topologico discreto per qualsiasi spazio topologico Y.

(2) Sia $\mathbb{R}_{\text{sup}}$ lo spazio topologico sull'insieme $\mathbb{R}$ dove i sottoinsiemi aperti sono gli intervalli $]-\infty, a[$ dove $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Un sottospazio $X \subseteq \mathbb{R}_{\text{sup}}$ non vuoto è compatto se e solo se ammette massimo.

Soluzione esercizio 1. (1) L'affermazione è falsa. Per dimostrarlo, occorre produrre un controesempio. Sia $X = \{x\}$ uno spazio topologico contenente un solo punto, e sia $Y = \{y_1, y_2\}$ uno spazio topologico contenente esattamente due punti $y_1 \neq y_2$. Dotiamo X della topologia discreta (che è l'unica possibile su un insieme fatto da un solo elemento, e coincide con la topologia banale), cioè gli aperti sono $\varnothing$ e X, e dotiamo Y della topologia banale, quindi gli aperti sono $\varnothing$ e Y.

Uno dei risultati che abbiamo visto a lezione sulla topologia prodotto è che scelto $x \in X$ lo spazio

$$\{x\} \times Y$$

è omeomorfo a Y. In questo caso $\{x\} \times Y$ coincide con tutto il prodotto $X \times Y$, quindi qui $X \times Y$ è omeomorfo a Y. Ma Y non ha topologia discreta, ad esempio il sottoinsieme

$$\{y_1\}$$

non è aperto in Y, perché non è vuoto ma non è uguale a Y. Quindi in questo esempio né Y né $X \times Y$ non ha topologia discreta.

(2) L'affermazione è vera. Dimostriamola. Supponiamo $X \subseteq \mathbb{R}_{\text{sup}}$ non vuoto e compatto, dimostriamo che X ha massimo.

Prima di tutto dimostriamo che X è limitato dall'alto. Gli insiemi

$$]-\infty, a[\, \cap X$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$ formano un ricoprimento aperto di X. Esiste un sottoricoprimento finito:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} (\,]-\infty, a_i[\, \cap X)$$

per certi $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, e basta porre $b = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ per ottenere

$$X = \,]-\infty, b[\, \cap X$$

da cui

$$X \subseteq \,]-\infty, b[$$

cioè X è limitato dall'alto.

Consideriamo $S = \sup X$. Visto che X è non vuoto allora $S \neq -\infty$, e visto che X è limitato dall'alto allora $S \neq +\infty$, cioè S è un numero reale.

Dimostriamo che $S \in X$ cioè che S è il massimo di X. Per assurdo sia $S \notin X$, quindi $x < S$ per ogni $x \in X$. In questo caso, per ogni $x \in X$ c'è un numero reale strettamente maggiore di x e strettamente minore di S. Da questo deduciamo l'inclusione

$$X \subseteq \bigcup_{c<S} \,]-\infty, c[\,.$$

Di nuovo estraiamo un sottoricoprimento finito (dal ricoprimento ottenuto intersecando questi intervalli con X), e otteniamo

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \,]-\infty, c_j[$$

per certi $c_1, \ldots, c_m$ tutti $< S$. Anche il massimo $d = \max\{c_1, \ldots, c_m\}$ è $< S$, ma allora non ci sono elementi di X fra d ed S, ma questo è assurdo perché S è l'estremo superiore di X. Segue che S è il massimo di X.

Viceversa, supponiamo che X abbia massimo $S \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che X è compatto. Sia $\mathcal{R}$ un ricoprimento aperto di X. Ciascun aperto del ricoprimento è ottenuto intersecando X con un aperto di $\mathbb{R}_{\text{sup}}$, cioè con un intervallo del tipo

$$]-\infty, a[\;.$$

Almeno uno di questi intervalli deve contenere $S \in X$, mettiamo sia

$$]-\infty, a_0[\;.$$

Ma allora tutto X è contenuto in $]-\infty, a_0[$, perché ogni elemento di X diverso da S è minore di S. Deduciamo che il singolo insieme

$$X \cap \,]-\infty, a_0[$$

forma un sottoricoprimento finito, quindi X è compatto.

Esercizio 2. Denotiamo con $M_2(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici 2×2 a entrate in $\mathbb{R}$, e con I_2 la matrice identità 2×2. Descrivere la decomposizione in componenti connesse del sottospazio $X \subseteq M_2(\mathbb{R})$ definito da

$$X = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = I_2\}.$$

Soluzione esercizio 2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

una matrice in $M_2(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = I_2$. Segue:

$$\begin{cases} a^2 + bc & = & 1 \\ b(a+d) & = & 0 \\ c(a+d) & = & 0 \\ bc + d^2 & = & 1 \end{cases}$$

Dalla seconda e dalla terza uguaglianza deduciamo tre casi possibili:

(1) $b = c = 0$, $a + d$ qualsiasi;
(2) $b \neq 0$, c qualsiasi, $a + d = 0$;
(3) $c \neq 0$, b qualsiasi, $a + d = 0$.

(Non sono casi "disgiunti", ci sono sovrapposizioni. Si potrebbero suddividere in modo diverso, questo modo qui è conveniente per dopo.)

Nel primo caso, dalla prima e dall'ultima uguaglianza deduciamo

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

dove $a, d \in \{1, -1\}$, cioè otteniamo le 4 matrici

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nel secondo caso otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$ e di $b \in \mathbb{R}_{\neq 0}$. Nel terzo caso otteniamo

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$ e di $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$.

Poniamo

$$X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}, b > 0 \right\},$$

$$X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}, b < 0 \right\},$$

$$X_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}, c > 0 \right\},$$

$$X_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & \frac{1-a^2}{c} \\ c & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}, c < 0 \right\},$$

Ricapitolando:

$$X = \{I_2\} \cup \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup \{A_3\} \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4.$$

Cerchiamo di capire quali di questi sottoinsiemi sono nelle stesse componenti connesse di X.

Osserviamo intanto che ciascun X_i è connesso, perché è immagine del connesso $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ tramite un'applicazione continua. Ad esempio X_1 è immagine dell'applicazione

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}.$$

Quindi ad esempio X_1 è tutto contenuto dentro una singola componente connessa, mettiamo C_1. Poi osserviamo che A_1 è nella chiusura di X_1, basta mettere $a = 1$ e far tendere b a zero da destra. Le componenti connesse sono sempre chiuse, quindi C_1 contiene anche la chiusura di X. Questo implica che anche A_1 è in C_1.

Analogamente si dimostra che A_1 è nelle componenti connesse C_2, C_3, C_4 che contengono rispettivamente X_2, X_3, X_4, e che anche il punto A_2 appartiene a C_1, C_2, C_3, C_4. Ma allora tutte queste componenti connesse si intersecano, e l'unica possibilità è che coincidano tutte $C_1 = C_2 = C_3 = C_4$.

Ricapitolando, l'unione

$$C = \{A_1\} \cup \{A_2\} \cup X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$$

è tutta contenuta in una singola componente connessa, e abbiamo

$$X = C \cup \{I_2\} \cup \{A_3\}$$

che è unione disgiunta.

Dimostriamo che I_2 e C non sono contenuti nella stessa componente connessa, usando la traccia. Le matrici di X hanno tutte traccia seguente:

(1) traccia nulla, vale per tutte le matrici in C;
(2) traccia $= 2$, vale per la matrice I_2;
(3) traccia $= -2$, vale per la matrice A_3.

Se per assurdo C e I_2 fossero nella stessa componente connessa di X, allora la traccia manderebbe questa componente in un connesso di $\mathbb{R}$ contenente 0 e 2, e contenuto nell'insieme di tutte le tracce possibili per matrici di X, cioè un connesso contenuto in $\{0, -2, 2\}$. Assurdo.

Quindi I_2 e C sono contenuti in componenti connesse diverse. Con lo stesso ragionamento concludiamo che A_3, I_2 e C sono tutti contenuti in componenti connesse diverse. Infine, A_3 è un solo punto e I_2 è un solo punto, quindi l'unica possibilità è che le componenti connesse di X siano proprio C, $\{A_3\}$ e $\{I_2\}$.

Esercizio 3. Sia $X = [0, 1]^2$ con topologia euclidea. Definiamo la relazione di equivalenza $\sim$ su X per cui (x_1, x_2) è in relazione con (y_1, y_2) se e solo se esiste una permutazione σ tale che $y_i = x_{\sigma(i)}$ per ogni $i \in \{1, 2\}$.

(1) Dimostrare che $X/\sim$ è di Hausdorff.
(2) Dimostrare che esiste un chiuso in X omeomorfo a $X/\sim$.

Soluzione esercizio 3. (1) Ricordiamo il criterio per avere X/G di Hausdorff, dove G è un gruppo di omeomorfismi di X: l'insieme

$$K = \{(x, g(x)) \mid x \in X, g \in G\}$$

dev'essere chiuso in $X \times X$. Nel nostro caso, il gruppo G è

$$G = \{\mathrm{Id}_X, \sigma\}$$

dove $\sigma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Allora

$$K = \{(x, x) \mid x \in X\} \cup \{(x, \sigma(x)) \mid x \in X\}.$$

Il primo dei due insiemi dell'unione è semplicemente la diagonale $\Delta_X \subseteq X \times X$, che è chiusa in $X \times X$ perché $X = [0, 1]^2$ è di Hausdorff. Dimostriamo che anche l'altro insieme

$$\Delta' = \{(x, \sigma(x)) \mid x \in X\}$$

è chiuso in $X \times X$. Consideriamo la seguente applicazione

$$\begin{array}{rccc} f\colon & X \times X & \to & X \times X \\ & (x, y) & \mapsto & (x, \sigma(y)) \end{array}$$

Quest'applicazione è continua, e visto che σ è un omeomorfismo di X in se stesso l'inversa di f esiste ed è

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & X \times X & \to & X \times X \\ & (x, y) & \mapsto & (x, \sigma^{-1}(y)) \end{array}$$

che è continua. Cioè f è un omeomorfismo. Osserviamo poi che $\Delta' = f(\Delta_X)$, quindi anche Δ' è chiuso in $X \times X$. Segue che K è chiuso essendo unione di un numero finito di chiusi, quindi $X/\sim$ è di Hausdorff.

(2) Consideriamo il "triangolo chiuso"

$$T = \{(x_1, x_2) \in X \mid x_1 \leq x_2\}.$$

Abbiamo che T è chiuso in X, quindi è compatto. Inoltre va suriettivamente nel quoziente $X/\sim$, perché ogni classe di equivalenza di X è fatta da uno o due punti, di cui uno sicuramente in T. Infatti per ogni $(x_1, x_2) \in X$ abbiamo

$$[(x_1, x_2)] = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1)\}$$

e vale $x_1 \leq x_2$ oppure $x_2 \leq x_1$, quindi $(x_1, x_2) \in T$ oppure $(x_2, x_1) \in T$.

Inoltre T va iniettivamente nel quoziente $X/\sim$. Infatti dati (x_1, x_2) e (y_1, y_2) in T con $(x_1, x_2) \neq (y_1, y_2)$, allora (y_1, y_2) non può essere ottenuto da (x_1, x_2) scambiando le due entrate, perché $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$, quindi $(x_1, x_2) \not\sim (y_1, y_2)$.

Concludiamo che la proiezione al quoziente $\pi\colon X \to X/\sim$ ristretta a T è una biiezione continua $\pi|_T\colon T \to X/\sim$ da un compatto in un Hausdorff. Segue che $\pi|_T$ è un omeomorfismo.

Esercizio 4. Siano $p_1, \ldots, p_n$ punti distinti di $\mathbb{R}^2$ con $n \geq 1$, e sia $X = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. Dimostrare che esistono n elementi, ciascuno di ordine infinito, che generano il gruppo $\pi_1(X)$.

Soluzione esercizio 4. Osservazione preliminare. Si dimostra che X ha come retratto per deformazione un sottoinsieme Y omeomorfo a un *bouquet di n circonferenze*, cioè n circonferenze che si intersecano tutte in un singolo punto. Un tale Y è fatto da n cammini chiusi sul piano $\mathbb{R}^2$ che partono tutti da un punto base di X, senza mai intersecarsi l'un l'altro si avvicinano ciascuno a un p_i, ci girano attorno una volta, e tornano indietro.

Visto che Y è retratto per deformazione di X, allora $\pi_1(X)$ e $\pi_1(Y)$ sono isomorfi. Potremmo usare questo fatto e svolgere facilmente l'esercizio lavorando con Y invece che X. Questo ci lascerebbe però col compito elementare ma abbastanza noioso di definire esplicitamente la deformazione da X a Y (fidandoci un po' dell'intuizione potremmo anche darla per buona).

Diamo allora una dimostrazione alternativa, che non richiede alcuna deformazione di questo tipo.

Supponiamo $n = 1$. Abbiamo già visto a lezione che $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{p_1\}$ ha come retratto per deformazione una circonferenza, la quale ha gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$. Quindi anche $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{p_1\}$ ha gruppo fondamentale isomorfo a $\mathbb{Z}$, che è generato ad esempio dall'elemento di ordine infinito $1 \in \mathbb{Z}$.

Descriviamo più precisamente il cammino in X che corrisponde all'elemento $1 \in \mathbb{Z}$: corrisponde a un cammino sulla circonferenza che genera il gruppo fondamentale di quest'ultima (cioè la cui classe genera il gruppo fondamentale della circonferenza). Ad esempio un cammino che percorre la circonferenza una volta, a velocità costante. Stiamo sfruttando il fatto che la circonferenza è retratto per deformazione di X, quindi questo cammino va pensato in X, ed è in X che va presa la sua classe di equivalenza. Inoltre possiamo anche scegliere la circonferenza di raggio piccolo, se necessario.

Supponiamo ora $n > 1$. Possiamo supporre che le ascisse di $p_1, \ldots, p_n$ siano tutte distinte. Se questo non è verificato, cioè se alcuni p_i hanno la stessa prima coordinata, basta ruotare il piano $\mathbb{R}^2$ attorno all'origine finché non otteniamo ascisse tutte diverse. Questo è possibile perché abbiamo infinite rotazioni possibili, e solo per un numero finito di rotazioni le ascisse di almeno due punti coincidono.

Denotiamo quindi $p_i = (x_i, y_i)$ con $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$. Possiamo assumere

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

riordinando i punti se necessario. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $x_i + \varepsilon < x_{i+1} - \varepsilon$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, e consideriamo i seguenti aperti:

$$\begin{aligned} A_1 &= X \cap (\,]-\infty, x_2 - \varepsilon[\, \times \mathbb{R})\,, \\ A_2 &= X \cap (\,]x_1 + \varepsilon, x_3 - \varepsilon[\, \times \mathbb{R})\,, \\ &\vdots \\ A_{n-1} &= X \cap (\,]x_{n-2} + \varepsilon, x_n - \varepsilon[\, \times \mathbb{R})\,, \\ A_n &= X \cap (\,]-\infty, x_2 - \varepsilon[\, \times \mathbb{R})\,. \end{aligned}$$

Per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ l'insieme A_i è una striscia aperta di piano, che sulle ordinate prende tutto $\mathbb{R}$ e sulle ascisse parte da poco dopo il punto p_{i-1} e arriva poco prima del punto p_{i+1}, striscia a cui abbiamo tolto il punto p_i. Denotiamo

$$B_i = A_1 \cup \ldots \cup A_i$$

e dimostriamo per induzione su i che il gruppo fondamentale di B_i è generato da i elementi. Il caso $i = 1$ è analogo al caso $n = 1$ discusso all'inizio, perché anche $B_1 = A_1$ contiene una circonferenza (attorno a p_1) che è un retratto per deformazione, quindi $\pi_1(B_1)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ ed è generato da un singolo elemento come abbiamo già visto.

Dimostriamo il passo induttivo $i - 1 \to i$. Usiamo il fatto che

$$B_i = B_{i-1} \cup A_i$$

decompone B_i in un'unione di due aperti non vuoti e connessi per archi. La loro intersezione coincide con $A_{i-1} \cap A_i$ che è uguale alla striscia aperta di piano

$$]x_{i-1} + \varepsilon, x_i - \varepsilon[\, \times \mathbb{R},$$

che è connessa per archi.

Il teorema di Seifert - Van Kampen assicura che $\pi_1(B_i)$ è generato dalle immagini di $\pi_1(B_{i-1})$ e di $\pi_1(A_i)$ tramite gli omomorfismi indotti dalle inclusioni di B_{i-1} e A_i in B_i.

Per induzione, il gruppo fondamentale di B_{i-1} è generato da $i-1$ elementi. Il gruppo fondamentale di A_i è generato da un elemento, dato da un cammino che percorre una volta una circonferenza C_i attorno a p_i tutta contenuta in A_i (è lo stesso ragionamento fatto per $n = 1$ e anche per A_1). Deduciamo che $\pi_1(B_i)$ è generato da i elementi, concludendo la dimostrazione del passo induttivo.

Visto che $B_n = X$, otteniamo che $\pi_1(X)$ è generato da n elementi. Rimane da dimostrare che gli elementi che abbiamo ottenuto con questa costruzione hanno ordine infinito.

Esaminiamo più precisamente il gruppo fondamentale di X, scegliendo questa volta un punto base $x \in X$ (che finora abbiamo tralasciato). Questo x non giace per forza sulla circonferenza C_i che fornisce il generatore di $\pi_1(A_i)$ visto prima: va quindi cambiato il punto base nel solito modo.

Cioè a ben vedere il generatore g_i di $\pi_1(X)$ fornito da $\pi_1(A_i)$ ad ogni passo $i = 1, 2, 3$, ecc. in realtà non corrisponde semplicemente a un cammino che percorre la circonferenza C_i attorno a p_i: per essere precisi g_i è rappresentato da un cammino del tipo:

$$\beta_i * \alpha_i * i(\beta_i)$$

dove β_i è un cammino dal punto base $x \in X$ fino a un punto q_i sulla circonferenza C_i, e α_i percorre la circonferenza una volta partendo (e finendo) in q_i.

Dimostriamo che il generatore g_i ha ordine infinito in $\pi_1(X, x)$ per ogni i. Per far ciò, ricambiamo ancora una volta punto base, prendendo come punto base q_i invece che x per $\pi_1(X)$. Abbiamo già a disposizione il cammino β_i per ritrasferire il punto base, cioè usiamo il solito isomorfismo di gruppi

$$(\beta_i)_\sharp \colon \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, q_i),$$

e si vede subito che $(\beta_i)_\sharp$ manda l'elemento g_i nella classe $[\alpha_i]$.

D'altronde C_i è un retratto[1] di X, questo si vede subito immaginando che p_i sia l'origine di $\mathbb{R}^2$, che la circonferenza C_i attorno a p_i abbia raggio 1, nel qual caso la retrazione è ottenuta come al solito normalizzando i vettori. Se p_i è in un altro posto e il raggio della circonferenza C_i non è 1, la retrazione si modifica facilmente usando una traslazione e un'omotetia.

Infine, la classe $[\alpha_i] \in \pi_1(X, q_i)$ è l'immagine della classe di α_i in $\pi_1(C_i, q_i)$, e quest'ultima classe ha ordine infinito perché $\pi_1(C_i, q_i)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e la classe di α_i è un generatore. Visto che $\pi_1(C_i, q_i)$ va iniettivamente in $\pi_1(X, q_i)$, la classe di α_i ha ordine infinito in $\pi_1(X, q_i)$, quindi anche il generatore $g_i \in \pi_1(X, x)$ ha ordine infinito.

Esercizio 5. Sia $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva differenziabile parametrizzata a velocità unitaria e tale che $\alpha''(t) \neq 0$ per ogni t nell'intervallo aperto I, siano κ e τ rispettivamente la curvatura e la torsione di α. Fissato un numero reale positivo r, supponiamo $\|\alpha(t)\|^2 = r^2$ per ogni $t \in I$ (cioè $\alpha(I)$ è sulla superficie di una sfera di raggio r). Dimostrare che

$$\kappa(t) \geq \frac{1}{r}$$

per ogni $t \in I$.

Soluzione esercizio 5. Partiamo da

$$\alpha(t) \cdot \alpha(t) = r^2$$

dove ricordiamo la notazione $v \cdot w$ per il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$. Derivando una volta otteniamo

$$2\alpha'(t) \cdot \alpha(t) = 0$$

e derivando ancora una volta

$$2(\alpha''(t) \cdot \alpha(t) + \alpha'(t) \cdot \alpha'(t)) = 0$$

Dividiamo tutto per 2 e ricordiamo che $\alpha'(t)$ ha norma 1, ottenendo

$$\alpha''(t) \cdot \alpha(t) = -1$$

D'altronde $\alpha''(t) = \kappa(t)n(t)$, da cui

$$|\kappa(t)n(t) \cdot \alpha(t)| = 1$$

e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz implica

$$\kappa(t)\|n(t)\| \cdot \|\alpha(t)\| \geq |\kappa(t)n(t) \cdot \alpha(t)| = 1.$$

Infine, visto che $\|\alpha(t)\| = r$ e $\|n(t)\| = 1$, otteniamo

$$\kappa(t)r \geq 1$$

cioè la disuguaglianza voluta

$$\kappa(t) \geq \frac{1}{r}.$$

[1] Ma non necessariamente un retratto per deformazione.